Euclides

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

45e jaargang
1969/1970
no 9
juni 1970

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. D. N. van der Neut - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester: Drs. J. van Dormolen, Karel Doormanlaan 50, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 9,00 per jaar.
Adreswijzigingen, opgave van nieuwe leden aan de secretaris.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-29786-30785.

Verzamelingen in het onderwijs

Prof. Dr. H. FREUDENTHAL
Utrecht

'Verzamelingen' is een nieuw onderwerp op school. Ervaringen zijn er nog nauwelijks. Het is niet te voorkomen, dat er fouten mee worden gemaakt. Dat geschiedt dan ook. Als men de buitenlandse school-literatuur in wiskunde raadpleegt, is het duizelen geblazen – vanaf de meest pretentieuze onder deze boeken, waarin de leraar geacht wordt de leerling een bedriegelijke exactheid voor te spiegelen, tot de meer aardse literatuur. De gebreken zijn op een noemer te brengen: foutieve concretiseringen van een materie die nu eenmaal abstract is en zich niet in willekeurige mate laat concretiseren. Ik denk dat we ons in Nederland nog gelukkig mogen prijzen, dat ons dit tot nu toe bespaard is gebleven.
Wanneer ik dan in 't vervolg toch vaderlandse school-literatuur critiseer, dan is het om de verspreiding van zekere fouten te voorkomen. Het is detailkritiek, die de grote lijnen van de methode niet aantast. Om zo concreet mogelijk te blijven, neem ik een bepaalde methode [1] als voorbeeld. Ik merk op dat deze methode door deze fouten als zodanig niet wordt geraakt (men kan de desbetreffende bladzijden er eenvoudig uitscheuren) en dat hetzelfde soort fouten ook in andere methoden voorkomt.

Postzegelverzamelingen

Haast alle moderne Nederlandse wiskundeboeken voor het voortgezet onderwijs beginnen met dit voorbeeld. Het is ongeveer het slechtste, dat je kunt verzinnen. Ik geef toe, dat het, als leraar en leerling erop berekend zijn, het serieus te analyseren, een uitstekend voorbeeld kan wezen – niet voor verzamelingen maar voor logische analyse. Als ze er niet voor berekend zijn, en als men naar verzamelingen toe wil, is het voorbeeld glad ernaast.
Het Nederlands is, naar ik meen, de enige taal waarin met het woord voor de mathematische verzameling het collecteren wordt geassocieerd. Zodoende zijn we aan die postzegelverzamelingen in de verzamelingenleer gekomen. (Het woord voor 'verzameling' luidt in elke taal weer anders, en dientengevolge is er in elke taal een ander onzinnig voorbeeld, waar je verzamelingen mee begint.)

[1] Moderne wiskunde, deel 1, Wolters-Noordhoff 1968.

In de geciteerde methode lees ik met rode letters 'Wie over een verzameling wil spreken moet nauwkeurig kunnen zeggen welke elementen die verzameling heeft'. Dit is natuurlijk als waarschuwing aan de leerling bedoeld. Om te weten wat een verzameling postzegels is, moet ik eerst weten wat een postzegel is. Dit blijkt heel duidelijk op blz. 11:

Wanneer twee postzegelverzamelaars hun verzamelingen vergelijken en tot de ontdekking komen, dat ze precies dezelfde postzegels hebben, dan zullen ze tegen elkaar zeggen: Onze verzamelingen zijn gelijk.

Twee keer de oranje 5-cent postzegel met de macaronis is dus één postzegel. Wat nu, als er van die ene postzegel toch twee exemplaren in een postzegelverzameling voorkomen? Hiermee wordt rekening gehouden in de Opmerking:

Een goede postzegelverzamelaar neemt in zijn album elke zegel maar één keer op.

Een postzegelverzameling met doublettes is dus geen *goede* verzameling. Hoe komt het dan dat verzamelaars doublettes hebben? De verzameling van alle postzegels op het postkantoor, Utrecht, aanwezig op 1 april 1970, 1 uur 's ochtends, is volgens deze definitie non-existent.
We worden hier met een niet onbelangrijk taalkundig probleem geconfronteerd. Het woord 'postzegel' wordt nu eenmaal in verschillende betekenissen gebruikt, zoals trouwens de meeste woorden in welke taal dan ook. Je kunt met 'postzegel' bedoelen een stukje papier al dan niet meer gegomd, meestal getand, meestal met een plaatje erop, dat je kunt gebruiken of hebt gebruikt, of hebt kunnen gebruiken voor het frankeren van een postzending. Je kunt er ook onder verstaan een soort van zulke stukjes papier die onderling op elkaar gelijken in die zin dat ze dezelfde postale functie kunnen of konden vervullen. Wat is nu een verzameling postzegels? Het een of het ander? Wel, het hangt ervan af. Ik dacht dat iedereen die over postzegelverzamelingen spreekt, de verzameling stukjes papier bedoelt; ik dacht dat niemand de verzamelingen van verschillende verzamelaars gelijk noemt, omdat ze dezelfde soorten bevatten. Het mag natuurlijk, maar zeg dan liever: ze bevatten dezelfde soorten.
Deze moeilijkheid kan zich meer voordoen. Wat bedoelt men met 'alle boeken over tuinieren'? Als een klant vraagt 'hebt u nog meer boeken over tuinieren?' bedoelt hij een ander begrip 'boek' dan wanneer de winkelier tot de bediende zegt 'zet de boeken over tuinieren in 't andere rek'. Zelfs in de wiskunde ontmoet men deze dubbelzinnigheid: Als ik zeg 'een driehoek is bepaald als de lengtes van de zijden, zeg 3, 4, 5, gegeven zijn' bedoel ik een ander begrip 'driehoek' dan wanneer ik zeg 'twee driehoeken met zijden 3, 4, 5 zijn congruent'.

Moeten we dan voor alle realistische voorbeelden van verzamelingen terugdeinzen? Volstrekt niet. In 't geciteerde boekje komen voor: de verzameling van de Nederlandse schilders, de verzameling van bergen hoger dan 2000 m, verzamelingen van leerlingen, enz. Je kunt op al die voorbeelden iets aanmerken: reken je er ook de Zondagsschilders bij, als op een berg van 1999 meter een toren staat, is hij dan hoger dan 2000 meter, telt een zieke leerling ook mee, enz.

Zulke onzekerheden zijn nu eenmaal niet te voorkomen. Maar bij deze voorbeelden bestaat dan toch de zekerheid, dat de elementen individuen zijn – individuele schilders, bergen, leerlingen. Bij de andere voorbeelden, die ik wil afkeuren, is er een *principiële* onzekerheid. Bedoelt men als elementen, individuen of soorten aan te wijzen? Als dit duidelijk gezegd wordt, is er geen bezwaar. Maar liever zou ik soorten als elementen willen vermijden.

Ik vind in 't zelfde boek akkolades met ertussen een vierkant, een rechthoek, een vlieger en twee parallellogrammen. Dit moet een verzameling voorstellen. Wat zijn zijn elementen? Wat bedoelt men daar met het vierkant? Eén vierkant, en zo ja welk vierkant? Of de soort 'vierkant'? Ik vind er tussen akkolades een huisje, een kerk, een windmolen. Wat bedoelt men met het huisje? Een huisje, en zo ja welk huisje? Of de soort 'huisje'?

Als men de buitenlandse schoolwiskunde-boeken doorbladert, vindt men daar vrij algemeen het denkbeeld beleden, dat in een verzameling van bloemen, ballen, kopjes de elementen niet op elkaar mogen lijken, dat in een verzameling auto's alle auto's op zijn minst in kleur moeten verschillen. Met ziet Venndiagrammen bezaaid met figuurtjes waaronder geen twee gelijke: een ster, een driehoek, een vierkant, een boom, een bal. Puntverzamelingen zijn bij deze auteurs taboe, want alle punten lijken op elkaar. Maar ook in de geciteerde methode komt dit denkbeeld tot uitdrukking. De daarstraks maar gedeeltelijk geciteerde 'Opmerking' luidt volledig:

Een goede postzegelverzamelaar neemt in zijn album elke zegel maar één keer op. In een wiskundige verzameling mag elk element maar een keer voorkomen. De verzameling $\{a, a, b\}$ is daarom hetzelfde als de verzameling $\{a, b\}$.

De tweede volzin bedoelt te zeggen, dat $\{a, a, b\}$ geen verzameling is; de derde, dat het wel een verzameling is, die dan met $\{a, b\}$ overeenstemt.

Postzegelverzamelingen zijn niet alleen voor leerlingen ondoelmatig; ook auteurs raken erdoor in de war. Iets zinnigs valt over de opmerking nauwelijks te zeggen, aangezien men niet weet wat de auteurs met a en b bedoelen. Dat sommige postzegelverzamelaars van elke soort maar een element verzamelen, behoeft voor wiskundigen geen reden te zijn, om de verzameling van de postzegels in een bepaalde automaat, de verzameling van alle groene Peugeots 404, de verzameling van alle punten van het vlak niet te vormen (ook die zijn immers allemaal van 't zelfde soort). Natuurlijk kan in een wiskundige (ook in een niet wiskundige) verzameling elk element maar één keer voorkomen. Een element is een voorwerp (concreet of abstract) en dat komt uiteraard maar één keer in de wereld voor. Het getal 3 komt maar één keer voor, al zal ik zijn naam 100 keer uitspreken of neerschrijven. De soort 'oranje macaronizegel van 5 ct.' komt maar een keer voor, maar elk lid van die soort komt ook maar één keer voor. De auteur bedoelde misschien, dat men bij het opsommen van de elementen van een verzameling elk element maar een keer mag noemen. Waarom? Is dat een wet? Waarom mag ik niet een verzameling beschrijven als bestaande uit de pleger van de aanslag op het Oostenrijkse vliegtuig en de pleger van de aanslag op het Zwitserse vliegtuig – misschien met de bedoeling om straks te bewijzen dat die verzameling maar één element bezit? Of wil de auteur niet verbieden, dat een element dubbel wordt opgesomd? Hij laat immers de schrijfwijze $\{a, a, b\}$ toe.

Verzamelingen van namen en letters

Het begint met de verzameling

{a, e, i, o, u}

als de verzameling van de klinkers in het alfabet omschreven. 'Verzameling der klinkers' was juist geweest. De vijf klinkers zijn objecten, waarvan men de namen a, e, i, o, u op 't papier kan zetten. 'Klinkers in 't alfabet' is misleidend. Het alfabet bestaat uit letters, waarmee men onder meer klinkers kan aanduiden. Deze onnauwkeurigheid zou niet zo erg zijn, als ze niet de inleiding tot grote verwarring was.
Het volgende voorbeeld is

$F =$ {a, b, c, d, e}.

De eerste vraag die men als wiskundige hier stelt, is: wat zijn die a, b, c, d, e? Ons is vanaf het eerste uur algebra ingehamerd, dat elke letter in een wiskundige uitdrukking iets betekent; althans was dit zo als we een leraar hadden, die ons ervoor wilde behoeden, om algebra als een zinloos spel met 26 letters te beschouwen.
Nu volgt in het boekje

$M =$ {a, k, r, t, i}

met de opmerking dat je uit letters van M het woord kar kunt vormen; kar behoort tot de 'verzameling van de Nederlandse woorden'.
De schrijvers vormen dus verzamelingen van letters en van woorden. Zoiets is volstrekt toelaatbaar, dwz. het is toelaatbare nonsens.
Allereerst moet men verklaren wat dezelfde letter, wat hetzelfde woord is. Is een letter op zijn kop hetzelfde, is een romein a en een cursief *a* hetzelfde? Zijn kan (ww.) en kan (zn.) hetzelfde?
Maar dit is niet de hoofdzaak. We duiden objecten taalkundig en schriftkundig door woorden aan. (Plaatjes zijn maar een noodhulp.) Gaan we nu woorden als objecten toelaten (hetgeen mag), hoe moeten we ze dan aanduiden? Voor zekere stad heb ik de naam Parijs. Als ik het nu in mijn hoofd haal, ook aan het woord Parijs aandacht te besteden, hoe moet ik het dan aanduiden? Parijs – gaat niet, want dit duidt de stad aan.
'Parijs heeft een metro, een nachtleven en vijf letters' lijkt me een beetje gek. 'Parijs heeft een metro en het woord Parijs heeft vijf letters' is goed.
Het zou allemaal nog goed te praten zijn, maar waar dient het toe? Met verzamelingen van namen, woorden, letters hebben we in de wiskunde nooit iets te maken. Als in 't boekje van de verzameling

{a, b, c}

sprake is, bedoelt men de verzameling van de letters a, b, c. Men wil dat elke letter zichzelf aanduidt. Dit is in strijd met alle mathematische usances. Als in 't boekje een vraagstuk staat zoals: 'Ga na, of

$$\mathrm{x} \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$$

is', wordt de leerling geacht 'neen' te zeggen. In een normaal wiskundig boek verwacht je als antwoord echter: ja, als

$$\mathrm{x} = \mathrm{a} \quad \text{of} \quad \mathrm{x} = \mathrm{b} \quad \text{of} \quad \mathrm{x} = \mathrm{c},$$

en dit dienen onze leerlingen te leren.
In wiskundige teksten pleegt tevoren uitgelegd te worden, wat a, b, c betekenen: vaste punten in het vlak, of willekeurige getallen of wat dan ook. Als a, b, c mensen zijn, is $\{a, b, c\}$ een verzameling mensen, als a, b, c postzegels zijn, is $\{a, b, c\}$ een verzameling postzegels, als a, b, c letters zijn (het mag wel) is $\{a, b, c\}$ een verzameling letters, en dat kunnen dan de letters x, y, z zijn als we toevallig deze letters met de tekens a, b, c hebben opgeroepen.
Verder bladerend vind ik

$$V = \{a, b, c, d, e\}, \quad W = \{c, d, e, f\}$$

en nog iets verder

$$V \cap W = \{c, d, e\},$$

en 'waarom is $b \notin V \cap W$'
vraagt men.
Als $b = c$, dan is heus $b \in V \cap W$. En dat $b = c$ zijn kan, is iets wat de kinderen telkens en telkens gezegd moet worden, als ze iets van de algebra willen begrijpen.
Het mag wel, verzamelingen van letters. Maar, realiseer je dan ook dat in de verzameling van letters altijd $b \neq c$ geldt, terwijl zodra letters volgens goed wiskundig gebruik iets anders dan zichzelf gaan betekenen, $b = c$ moet kunnen wezen. Naar dit soort wiskunde, waar je zinvol een vergelijking zoals

$$(?x)(x-a)(x-b) = 0$$

kunt oplossen, moet je toe. Met verzamelingen van letters, namen, woorden, kun je die weg alleen blokkeren.[1])

Conclusie

Is dit nu muggezifterij? Het is evenzeer muggezifterij als het verschil tussen 'liggen' en 'leggen', tussen 'word' en 'wordt'. Het antwoord op uiteenzettingen als de bovenstaande luidt vaak: 'Je kunt met kinderen niet alles zo exact doen'.

---

[1] Een der auteurs zei me, dat hij letters die zichzelf betekenen romein ipv. cursief heeft laten zetten. Dit is echter niet konsekwent geschied. Op p. 226 wordt gevraagd of de verzamelingen $\{p, o, e, s\}$ en $\{k, a, t\}$ gelijk zijn. Ze zijn het volgens wiskundige usances bijv. als $p = o = e = s = k = a = t$. Maar waar kunnen leraar of leerling de bedoeling van de auteur uit opmaken dat romein-letters zichzelf aanduiden? Over zo'n belangrijk *feit* had toch niet moeten worden gezwegen.

3 + 2 is voor elke leeftijd hetzelfde, een drogredenering is voor elke leeftijd een drogredenering. Als je met verzamelingen van postzegels of van letters op een bepaalde leeftijd niet redelijk kunt werken, omdat ze te veel kritisch besef vereisen, laat ze dan weg, je verliest er niets aan. In het geciteerde boekje blijkt dit ten duidelijkste; je kunt deze dingen gerust weglaten, zonder de opbouw te verstoren. Ik heb een buitenlands boekje voor dezelfde leeftijd onder mijn ogen, waarin een heel jaar deze nonsens-verzamelingenleer wordt beoefend. Je kunt ervan op aan, dat de leerlingen na een jaar niet meer in staat zijn, enige algebra te leren.

De Nederlandse wiskunde-leraren zijn in heroriënteringscursussen op de nieuwe wiskunde voorbereid. In die cursussen werd wiskunde gedoceerd. Uiteraard kwamen daar geen postzegelverzamelingen, verzamelingen van letters, woorden, Romeinse cijfers, of familie-relaties en zaken-relaties, enz. voor. De didacticus, die het voor een ander publiek moet brengen, verzint er iets nieuws op. Terecht. Maar laat het dan wiskunde blijven: verzamelingen en relaties, waar ze voor deugen en niet om er sommetjes mee te maken. We hebben een van de echte wiskunde gescheiden schoolwiskunde gehad en we gaan met reuzestappen weer naar zo iets toe.

Toen ik in de buitenlandse literatuur zag wat voor fouten kunnen worden gemaakt, heb ik er in lezingen en cursussen op gewezen. Ik hoop dat er een preventieve werking van uit gaat.

Moedertaalonderwijs en toch geen „Nederlands"[1]

Dr. J. S. TEN BRINKE

Pedagogisch-Didactisch Instituut voor de Leraarsopleiding, Rijksuniversiteit Utrecht

1.00 *De situatie in het algemeen*

Voor iedereen die wil proberen een indruk te krijgen omtrent het moedertaalonderwijs in de huidige MAVO-, HAVO- en VWO-scholen, is het van belang te bedenken dat dit onderwijs *niet alleen in het kader van het vak Nederlands gegeven wordt.* Ook in andere vakken kan dergelijk onderwijs in feite plaatsvinden. Een leraar-wiskunde die zijn leerlingen een probleem voorlegt, en dan probeert samen met hen tot steeds preciezere formuleringen te komen van het probleem, van de oplossingsmethode en de rechtvaardiging daarvan, geeft taalonderwijs. Maar ook een meer 'teacher-centered' leraar die zelf zeer veel praat, kan dit doen. Men denke aan de 'goed-vertellende' of 'goed-analyserende' leraar-geschiedenis, door wiens optreden de taalschat der leerlingen kan worden verrijkt.

Veel leraren-Nederlands zien hun collega-niet-neerlandicus pas als vakbroeder, indien deze bereid is bij door leerlingen gemaakt schriftelijk werk 'behoorlijk Nederlands' te eisen. Deze opvatting doet het mondeling taalgebruik te weinig recht wedervaren. Zonder enige twijfel draagt de leraar-natuurkunde die bij een proefwerk 'scherpte en exactheid' eist ook in het taalgebruik, belangrijk bij tot een bepaald aspect van de taalvaardigheid van zijn leerlingen. Het mondeling taalgebruik is echter minstens even belangrijk en de bevordering daarvan kan zich eigenlijk alleen maar voltrekken tijdens de gewone les, dus op een voor de leraar-Nederlands onzichtbare wijze. Overigens, soms wordt dat werk van de collega niet-vakgenoot op spectaculaire wijze zichtbaar. Zo kunnen de resultaten van geschiedenisonderwijs op discussiebasis zich manifesteren in de opstellen in het kader van het vak Nederlands. Uit mijn eigen praktijk herinner ik me de grote kundigheid waarmee een 6e klas – die het jaar daarvoor nauwelijks 'Nederlands had gehad' (!) – problemen stelde, van alle kanten bekeek en tot een, vaak goed genuanceerde conclusie leidde. Tot de door die klas bereikte opstelresultaten hadden de door mijn geschiedenis-collega op de klas afgevuurde 'doordenkertjes' en de daarop

[1] Met toestemming overgenomen uit MOER, Tijdschrift voor het onderwijs in het Nederlands, augustus 1969.

volgende, door haar geleide discussies bij gedragen. Een en ander was voor wijlen Karsemeijer een reden om het opstel als onderdeel in het eindexamen hoog aan te slaan: 'Je vindt er de kwaliteit van het hele *team* van leraren dat in de hoogste klassen heeft lesgegeven, zo aardig in terug'.

De situatie dat er moedertaalonderwijs wordt gegeven ook buiten het vak 'Nederlands' treft men in alle onderwijstypen aan, o.a. in het basisonderwijs – goed rekenonderwijs kan mede taalonderwijs zijn – en zeer sterk in het kleuteronderwijs. Voor zover mij bekend is, wordt in de kleuterschool het taalonderwijs het meest geïntegreerd gegeven, dat wil hier zeggen: opgenomen in het geheel van het onderwijs. Ongetwijfeld zullen de lezers van „MOER" hierover in de toekomst worden geïnformeerd. De leraar in de basis- en in de kleuterschool (met A. D. de Groot weiger ik de zinloze differentiatie 'leidster', 'onderwijzer', 'leraar', 'docent' te gebruiken; jammer voor de kleuterleidster misschien, die nu een man wordt) is zich over het algemeen ook beter van het bestaan van taalonderwijs buiten het vak 'taal' bewust, omdat hij de andere vakken grotendeels zelf geeft. Juist daarom is het voor het AVO/VWO echter extra nodig zich het bestaan van dit' onofficiële' maar zeer belangrijke moedertaalonderwijs te realiseren.

Het is in dit verband wel merkwaardig dat ook de meest gezaghebbende literatuur over het moedertaalonderwijs in de secundaire school blijk geeft van de juistgemelde eenogigheid. Natuurlijk vindt men er wel losse zinsneden over de belangrijke rol die de niet-neerlandicus bij het bevorderen van goed taalgebruik speelt, maar de gespendeerde ruimte staat in geen enkele verhouding tot het werkelijk belang van diens activiteit. Dat wordt alleen maar gehonoreerd met een apart hoofdstuk – en dat ontbreekt niet alleen in de 'Handleiding', maar ook in de veel diepgaander buitenlandse werken als die van Whitehead en (de in alle andere opzichten zeer volledige) Ulshöfer. Overigens verscheen in het door de laatste geredigeerde tijdschrift 'Der Deutschunterricht' een uitstekende bijdrage over het bedoelde onderwerp van Sigrid Matthies.

In het nu volgende wordt één aspect van het onderwerp uitgewerkt aan de hand van een wiskundige opgave en van twee uitwerkingen daarvan door leerlingen. Dit materiaal verschilt van wat door Matthies is bestudeerd, doordat het van specifiek-wiskundige aard is. Matthies' belangstelling ging uit naar opstellen over wiskundige onderwerpen, b.v. het ontbinden in factoren (een daarvan, $\pm$ 375 woorden tellend, is in haar artikel opgenomen). Dat 'gewone' wiskundige opgaven en de uitwerking daarvan interessant taalmateriaal kunnen vormen (kùnnen: als zij slechts formuletaal bevatten, zijn ze taalkundig minder interessant) heeft zij blijkbaar niet gezien. Daardoor zijn haar enige belangrijke gezichtspunten ontgaan (zie o.a. 2.33 en 2.43 hieronder).

Het materiaal werd mij ter beschikking gesteld door Drs. J. van Dormolen, docent in de didactiek van de wiskunde aan de Rijksuniversiteit te Utrecht. Vergeleken zullen worden de werkwijze van o.a. een ideale leraar-wiskunde en een ideale leraar-Nederlands bij de beoordeling van door leerlingen gemaakt

werk. Inlichtingen omtrent de werkwijze van de eerste kreeg ik wederom van de heer van Dormolen. De verantwoording voor de manier waarop ik deze inlichtingen heb verwerkt, berust geheel bij mij.
Ik beperk mij tot het bespreken van enkele typische, door leerlingen gemaakte fouten. Dit geschiedt alleen daarom, omdat deze fouten duidelijke aangrijpingspunten vormden voor mijn uiteenzetting. Bij een volledige beoordeling van het werk zou natuurlijk een meer positieve benadering de voorkeur verdienen.

2.00 *Mathematisch 'Nederlands'.*

Leerlingen van een 3-gymnasiumklas kregen de volgende opgave:
Bewijs dat de vorm $3x^2+12x$ een kleinste waarde heeft, bepaal die kleinste waarde en bepaal voor welke waarde van x die kleinste waarde wordt bereikt.
Voor de lezer die zich de benodigde wiskundige operaties niet meer herinnert, volgt hier eerst een voorbeeld van een uitgewerkte oplossing (de leerlingen mogen het eerste gedeelte desgewenst korter doen):

$$\begin{aligned}&3x^2+12x =\\&3(x^2+4x) =\\&3(x^2+4x+4-4) =\\&3\{(x+2)^2-4\} =\\&3(x+2)^2-12.\end{aligned}$$

Deze laatste vorm heeft een kleinste waarde, want $(x+2)^2$ kan niet kleiner zijn dan 0. $3(x+2)^2$ kan dus ook niet kleiner zijn dan 0. Omdat er een getal wordt afgetrokken dat niet varieert, is er dus een kleinste waarde, nl. 0 min dit getal. De kleinste waarde is $0-12 = -12$. Die waarde wordt bereikt bij $x = -2$.

2.10 *De eerste 'test-case'.*

Een leerling gaf de volgende oplossing:

Oplossing 1
$3x^2+12x = 3(x+2)^2+4$ heeft een kleinste waarde 4 die bereikt wordt voor $x = -2$.

Verklaring. $(x+2)^2$ moet nul worden $\rightarrow x = -2$ als dit nul is vermenigvuldig je dit met 3 $\rightarrow$ nog steeds nul. dan tel je er 4 bij op en krijg je de kleinste waarde die deze kan aannemen: 4.

2.20 *Beoordeling door een ideale leraar-wiskunde (i.l.w.)*

a de uitkomst wat betreft de kleinste waarde is fout, omdat $3x^2+12x$ niet gelijk is aan $3(x+2)^2+4$ (maar aan $3(x+2)^2-12$; zie boven);

b wat betreft de 'verklaring':

1° ik begrijp wel wat hij bedoelt, maar zoals het er staat is het onzin: $(x+2)^2$ 'moet' b.v. helemaal geen nul worden, en wat moet dat pijltje eigenlijk achter 'worden'?

2° ik vind het vervelend dat hij geen punt zet na -2, en 'dan' met een kleine letter schrijft.

Reactie van een student, a.s. leraar-wiskunde:

a hier ben ik het mee eens;

b dit is geen zaak voor een leraar-wiskunde, hoogstens voor een leraar-Nederlands.

Dupliek van de i.l.w.: zeker is b 1° het terrein van de leraar-wiskunde, want een leerling hoort wat hij wil zeggen zo op te schrijven dat het voor een ander volkomen duidelijk is wat hij bedoelt; aan inzichten die niet goed in woorden zijn vertaald, heeft de mensheid niets.

2.30 *Beoordeling van deze beoordeling, vanuit het gezichtspunt van een ideale leraar-Nederlands (i.l.n.)*

We kunnen voor de duidelijkheid het best onderscheid maken tussen twee soorten van inhoud; nl. de *bedoelde inhoud* en de *feitelijke inhoud* van een taaluiting. Van de wonderlijke formulering '$(x+2)^2$ moet nul worden $\rightarrow x = -2$' is de bedoelde inhoud juist, de feitelijke inhoud onjuist. [2] We kunnen zeggen dat dit laatste een gevolg is van het feit dat aan de bedoelde inhoud *een verkeerde vorm* is gegeven. Had die vorm b.v. geluid: '$(x+2)^2$ is minstens nul, en het is nul als $x = -2$', dan was ook de feitelijke inhoud juist geweest.

2.31 Iets te simplistisch gezegd kan de taak van een leraar-moedertaal voor wat de produktieve taalvaardigheid betreft worden beschreven als: *ervoor zorgen dat de leerlingen taaluitingen produceren waarvan de feitelijke inhoud in overeenstemming is met de bedoelde inhoud.* [3] Als de leraar-wiskunde daar nu ook belangstelling voor heeft, dan stempelt hem dit principieel tot leraar-moedertaal. Dat de a.s. leraar-wiskunde alleen op de bedoelde inhoud meent te moeten letten, aldus de absolute noodzaak negerend dat ook wiskundige

[2] Achter het onderscheid feitelijke vs. bedoelde inhoud schuilt een vrij ingewikkelde psycho-linguistische problematiek, die hier niet behandeld kan worden. Zo is het vaak moeilijk en soms onmogelijk voor de beoordelaar uit te maken wat nu eigenlijk bedoeld is. Soms geldt dit voor de leerlingschrijver zelf ook! De in zulke gevallen te volgen procedure blijft dus ook buiten beschouwing.

[3] 2.35 geeft een aanvulling bij deze formulering. Voor een uitvoeriger behandeling, zie mijn artikel in 'Levende Talen'.

uitingen communicatief moeten zijn [4], is tekenend voor de schadelijke 'hokjesgedachte' in het AVO/VWO-systeem.

2.32 Ook het niet zetten van een punt na -2 en het schrijven van 'dan' met een kleine letter zijn fouten in *vormgeving*. Aangetoond kan worden – het zal hier achterwege blijven – dat alle vormgevingsfouten in theorie fouten in de feitelijke inhoud veroorzaken, ook de kleinste.
Voldoende is het hier vast te stellen dat de onder b 2° genoemde vormgevingsfouten de lezer geen noemenswaardige moeilijkheden op het gebied van de interpretatie van de tekst bezorgen. Het is daarom begrijpelijk dat de leraar-wiskunde niet verder gaat dan die fouten 'vervelend' te vinden. Wellicht zal hij er bij het geven van een beoordeling van het antwoord (b.v. via een cijfer) ook geen rekening mee houden. Daarin zou dan een klein verschil liggen met de leraar-Nederlands. Deze moet krachtens zijn opdracht alle aspecten van de taaluiting in de beoordeling betrekken, dus ook die welke de communicatieve functie nauwelijks schaden.
Indien we de fouten sub b 1° als schadelijke en die onder sub b 2° als onschadelijke fouten beschouwen, kunnen we dus zeggen, dat de leraar-Nederlands ook de onschadelijke fouten in zijn beoordeling moet betrekken.

2.33 De indruk dat beide ideale leraren t.a.v. hun beoordelings-wijze voornamelijk verschillen op het punt van de waardering van het niet-pragmatische, wordt nog op een andere manier bevestigd, als we nagaan hoe een i.l.n. de eerder gegeven *goede* oplossing van het probleem waardeert.
Ik herhaal deze nog even:

$$3x^2+12x = \ldots = 3(x+2)^2-12.$$

Deze laatste vorm heeft een kleinste waarde, want $(x+2)^2$ kan niet kleiner zijn dan 0. $3(x+2)^2$ kan dus ook niet kleiner zijn dan 0. Omdat er een getal wordt afgetrokken dat niet varieert, is er dus een kleinste waarde, nl. 0 min dit getal. De kleinste waarde is $0-12 = -12$. Die waarde wordt bereikt bij $x = -2$.
Het lijdt weinig twijfel of een i.l.n. zou bij het doorlezen van een in een dergelijke stijl geschreven tekst pijnlijk getroffen worden door de haast maniakale *woordherhaling*: het is alles 'klein' en 'waarde' wat de klok slaat. Voor een i.l.w. ligt deze zaak totaal anders – getuige ook de opgave (zie 2.00), waarin

[4] Vaak wordt nog een tweede reden opgegeven waarom b.v. een leraar-wiskunde zich tevens met de formulering van een antwoord moet bezighouden, nl. deze, dat 'slecht-geformuleerd' onverbrekelijk verbonden moet zijn met 'slecht-gedacht'. De psychologie noch de taalwetenschap hebben deze stelling echter tot nu toe overtuigend weten te bewijzen. Daarom beperk ik mij tot het noemen van het, op zichzelf reeds doorslaggevende, criterium van de communicativiteit (= de mate waarin een mededeling voor een lezer of hoorder die op het betrokken terrein thuis is, kan worden begrepen).

op 23 woorden driemaal het woord 'kleinste' en viermaal het woord 'waarde' voorkomt! Als pragmaticus stelt hij nl. de zg. redundantie (= de 'overinformatie', die de duidelijkheid bevordert) zeer op prijs. De schrik zou hem om het lijf slaan als hem een tekst werd voorgelegd die aan zg. leesbaarheidscriteria zou voldoen, b.v. de volgende (waarin ik genoemde criteria in enigszins overdreven mate heb toegepast):

... Bekijkt u die laatste vorm, $3(x+2)^2-12$, nu eens. Daarin ziet u staan: $(x+2)^2$. Kan die kleiner zijn dan 0? Nee! En kan dan 3 maal die vorm onder de nul komen? Ook nee! Goed: $3(x+2)^2$ wordt nooit lager dan nul. Maar: méér dan 12 mag er natuurlijk niet af. Nu weet u dus zeker dat er een kleinste waarde is. Zullen we hem even uitrekenen: $0-12 = -12$! Enz.

Wellicht ziet de lezer voor het geestesoog naast de geërgerde i.l.w. reeds de prettig-gestemde i.l.n. opdoemen, die 'leuk, vlot geschreven' onder het opstel schrijft (ik generaliseer natuurlijk te sterk; er zullen ook i.l.n.'s zijn die er b.v. bijschrijven: „een beetje zakelijker mag best"). In ieder geval mogen we vaststellen, dat een i.l.n. de juistgenoemde woordherhaling beslist schadelijk zou achten in een essay-achtig opstel, nl. schadelijk voor de *leesbaarheid*, terwijl een i.l.w. juist een te geringe woordherhaling in een oplossing van een vraagstuk als het bovenstaande als schadelijk zou kunnen beschouwen nl. als schadelijk voor de *duidelijkheid*. Met opzet zijn in deze formulering de woorden 'essay-achtig' en 'oplossing van een vraagstuk' opgenomen. Het onderscheid ligt nl. in de teksten, en wel in de functie daarvan: een essay heeft meer dan de oplossing van een wiskunde-vraagstuk de functie om de lezer plezierig te stemmen, en omgekeerd wil die vraagstuk-oplossing in veel sterkere mate iets vastleggen dan een essay. Dit onderscheid gaat echter enigszins over op de twee typen van leraren, omdat de ene uit de aard van zijn werk meer met essays, de ander meer met 'oplossingen van vraagstukken' te doen heeft.

Het spreekt vanzelf *dat het in het belang van zowel leerling als leraar is, dat de i.l.n. en de i.l.w. zich van het juist beschreven, zeer wezenlijke verschil van instelling, bewust zijn.* [5]

2.34 Behalve fouten in de feitelijke inhoud vertoont het antwoord ook een fout in de bedoelde inhoud: de kleinste waarde is niet $+4$ maar -12. Dat een leraar-wiskunde dit in zijn beoordeling betrekt, behoeft geen commentaar. Ook de leraar-Nederlands wordt geregeld geconfronteerd met fouten in de bedoelde inhoud. Behalve met relatief kleine feitelijke onjuistheden – b.v. het de ruimtevaart 5 jaar geleden laten beginnen – kan hij te maken krijgen met ernstiger fouten, b.v. het totaal verkeerd plaatsen van belangrijke historische ontwikkelingen ('in de 19e eeuw kwam het Rationalisme op'), het doen van gratuite beweringen (zonder toelichting poneren: 'Het zijn de landeigenaars die

[5] Het verschil 'leesbaar versus duidelijk' ligt niet altijd alleen in het vlak van de vormgeving (c.q. feitelijke inhoud); het kan ook in het vlak van de bedoelde inhoud liggen. Dit punt blijft hier geheel buiten beschouwing (vgl. noot 2).

het ruimtegebrek in Nederland veroorzaken') of het onlogisch redeneren. Sommige leraren-Nederlands wensen met dergelijke fouten geen rekening te houden en vormen dan als het ware de antipood voor de zoëven genoemde a.s. wiskunde-leraar: zoals de laatste bepaalde fouten niet wenste te betrekken in zijn oordeel omdat dat 'toch Nederlands was', zo menen de eersten niet met weer andere fouten rekening te mogen houden omdat het 'niet tot Nederlands behoort'. Echter: het niet-rekening houden met de bedoelde inhoud geeft de leerling de indruk dat *alleen de vormgeving* belangrijk is, en niet de bedoelde inhoud, of: de bedoelde informatie. Het behoeft geen betoog dat hun daarmee een totaal verkeerde indruk omtrent de functie van de geschreven taal resp. omtrent goed schrijven wordt bijgebracht. Het enig juiste standpunt is dan ook m.i. de bedoelde inhoud wel in de beoordeling te betrekken [3], ook al levert dit af en toe moeilijkheden op in verband met het feit, dat deze bedoelde inhoud op een terrein kan liggen, dat de beoordelaar vreemd is.
Bij de beoordeling kan, analoog aan de situatie bij de vormgeving, verschil gemaakt worden tussen *schadelijke* en *onschadelijke* fouten in de bedoelde inhoud.

2.35 Resumerend kunnen we zeggen dat de ideale leraar-wiskunde en de ideale leraar-Nederlands t.a.v. geschreven teksten *in principe hetzelfde* beoordelings-model volgen. Daar een beoordeling, als het goed is, niets anders is dan een verlengstuk van het lesgeven, zal deze overeenkomst tevens in hun lesgeven teruggevonden kunnen worden. De diepe oorzaak van deze analogie ligt in het feit dat beiden respect verschuldigd zijn aan twee hoofdvoorwaarden waaraan taaluitingen moeten voldoen: *de bedoelde informatie moet adequaat zijn*, en de feitelijke inhoud moet de bedoelde inhoud dekken (*via een adequate vormgeving*).
Bij deze principiële overeenkomst valt het kleine verschil betreffende de waardering van niet-schadelijke vormgeving (*zie* 2.32) *in het niet.*
Wel hebben we, bij de kwestie leesbaarheid versus duidelijkheid, gezien dat wat 'adequaat' is bij de ene tekst dat nog niet behoeft te zijn bij het andere. Aan de genoemde overeenkomst doet echter ook dit niets af.

2.40 *Een tweede voorbeeld*

In het nu volgende tweede (en laatste) voorbeeld zullen we zien dat er minstens nog een tweede geval is waarin 'adequaat' in het vak Nederlands niet op hetzelfde neerkomt als in het vak wiskunde. De principiële overeenkomst tussen de benadering van de i.l.n. en die van de i.l.w. wordt echter bevestigd.

2.41 Oplossing 2 luidde:

De vorm $3x^2+12x$ is een tweedegraadsvergelijking. Als je uit de eerste 2 delen 3 buiten haakjes brengt, verandert er niets aan de vorm. Tussen haakjes staat dan (x^2+4x), dit is niet gelijk aan $(x+2)^2$, want dan heb je er $+4$ bij opgeteld. Om het goed te maken moet je er -4 aftrekken. Die -4 moet je dan weer met 3 vermenigvuldigen. Er staat dan: $3(x+2)^2-12$ en dat is volkomen gelijk aan $3x^2+12x$. De vorm heeft een kleinste waarde van -12, want een kwadraat is altijd positief of nul. Je moet het met 3 vermenigvuldigen, dus het is op zijn minst nul, nl. als $x=-2$ komt er te staan $3(-2+2)-12$ en dat is -12. De waarde van het kwadraat wordt dus altijd positief, $\times 3$ blijft positief dus is de kleinste waarde -12.

2.42 Voor vrijwel alle aspecten van dit mini-opstel maakt het geen verschil of het door een i.l.w. of een i.l.n. wordt beoordeeld. Beiden zullen b.v. (het is niet mijn bedoeling het stukje volledig in details te bespreken) t.a.v. de bedoelde inhoud constateren dat één element van de vraag niet expliciet beantwoord is ('bewijs dat de vorm een kleinste waarde heeft' - zie 2.00), en dat de eerste zin irrelevante informatie bevat (terwijl het bovendien niet om een 'vergelijking' maar om een 'vorm' gaat). T.a.v. de vormgeving zullen beiden zich bij het lezen van het laatste $\frac{1}{3}$ gedeelte (na: 'positief of nul') wel naar het hoofd grijpen. Verschil van beoordeling zal niet optreden op het punt der woordherhaling (die is in dit stukje niet spectaculair), wel op dat van de onschadelijke foutjes als een komma i.p.v. een punt. Er zal nog een tweede verschilpunt zichtbaar worden, dat nog niet besproken is, nl. een hoge resp. geringe waardering voor het *zuiver logisch aspect*. Dit kunnen we zien uit hun verschil in beoordeling van de zesde en zevende zin.

2.43 Zin 6 'Er staat dan: $3(x+2)^2-12$ en dat is volkomen gelijk aan $3x^2+12x$; Zin 7: '. . . want een kwadraat is altijd positief of nul'.
Volgens de i.l.w. is deze mededeling onlogisch: iets is gelijk aan iets, of niet gelijk aan iets, maar niet *volkomen* gelijk. Evenzo is een kwadraat positief of nul, niet: *altijd* positief of nul. Om dezelfde reden veroordeelt hij uitspraken volgens welke bepaalde lijnen *precies* door een zeker punt gaan, etc.
In al deze gevallen neemt de i.l.n. een tegenovergesteld standpunt in. In de meeste taalsituaties waar hij mee te maken heeft, speelt dan ook niet de zuivere logica, maar de 'psycho-logica' een rol; en van het standpunt van die 'psycho-logica' gezien is de mededeling dat iets 'volkomen gelijk' is aan iets anders, geheel correct (over het onlogische van normaal taalgebruik is veel geschreven; zie o.a. 'Schriftelijk rapporteren').
Belangrijk is het weer vast te stellen, dat het *de functie of de aard van de tekst* is, die bepaalt of logische of psycho-logische criteria bij de beoordeling een rol moeten spelen. Dat de i.l.w. meer logisch ingesteld is dan de i.l.n. kan dan verklaard worden uit de functie en de aard van de teksten waar hij gewoonlijk mee omgaat.

3.00 *Conclusie en perspectief*

We hebben gezien dat bepaalde aspecten van het werk van de (ideale) wiskunde-leraar principieel nagenoeg gelijk zijn aan die van de hoofdwerkzaamheden van de (ideale) leraar-Nederlands, en dat ze, omdat beide personen met teksten van verschillende aard en functie werken, elkaar op het gebied van het onderwijs in het goed-schrijven dus uitstekend kunnen aanvullen (mits ze van elkaar weten wat ze doen).

Sigrid Matthies heeft reeds duidelijk gemaakt dat ook (ideale) leraren in andere vakken (zij noemt: natuur-, schei- en aardrijkskunde; dat een en ander ook van toepassing is op de biologie en de geschiedenis ligt voor de hand) voor soortgelijke aanvullingen zouden kunnen zorgen.

Deze aanvullingen zullen zeker niet beperkt blijven tot het schriftelijk taalgebruik (dat in dit artikel voornamelijk aan de orde is geweest). In de inleiding is hier al iets over opgemerkt.

Het is dus duidelijk dat samenwerking op het gebied van het moedertaalonderwijs door docenten in een groot aantal vakken tot een belangrijke verrijking van dat onderwijs kan leiden, tenminste voor zover het de *zakelijke* taalvaardigheid betreft: op het meer artistieke terrein (b.v. dat van 'creative writing') mogen van de leraren in de juistgenoemde vakken in het algemeen geen bijdragen worden verwacht.

Hoe die samenwerking moet worden georganiseerd, of zij ook consequenties zou moeten hebben voor het eindexamen, of, en dit is het belangrijkste, een en ander zal leiden tot een andere verdeling van werkzaamheden tussen de leraar-Nederlands en zijn collega's, dit zijn vragen die door de praktijk zelf moeten worden beantwoord. In ieder geval lijkt dit wel vast te staan:

1 het is nodig dat de leraar in de in dit artikel genoemde vakken als wiskunde, aardrijkskunde, enz., weet, dat moedertaalonderwijs een aspect van zijn taak is, of hij wil of niet;

2 dat de leraar-Nederlands dat ook moet erkennen, en niet door misplaatste hoogmoed de anderen bij voorbaat de moed moet ontnemen iets te ondernemen;

3 dat de leraar-Nederlands de aangewezen figuur in de school is om het initiatief tot de bedoelde samenwerking te nemen;

4 dat het, alvorens tot samenwerking over te gaan, nuttig is dat alle deelnemende docenten begrijpen dat niet het letten op onschadelijke foutjes (*dt*'s b.v.) hen tot taalleraren maakt, maar het letten op essentiële voorwaarden voor zakelijk taalgebruik; bovenstaand artikel beoogt de leraar-Nederlands een basis te geven voor een uiteenzetting daaromtrent;

5 dat het in het licht van het bovenstaande zeer verheugend is dat het plan-Drewes voorziet in moedertaalonderwijs voor alle a.s. docenten.

Voor de goede orde vermeld ik nog dat de expliciete *taalbeschouwing* en het *literatuuronderwijs* in dit artikel buiten beschouwing zijn gebleven. Ook op die gebieden is overigens samenwerking mogelijk, maar de situatie ligt er anders.

GENOEMDE LITERATUUR

Boer, H. de (red.) Schriftelijk rapporteren; een praktische handleiding enz. Utrecht (Spectrum).

Brinke, J. S. ten. Naar een beoordelingsmodel van het zakelijke opstel. Levende Talen 1966, pg. 36 vlgg.

Matthies, Sigrid. Versuche zur Neugestaltung des Sachaufsatzes auf der Mittelstufe. Der Deutschunterricht 17 (1965), pg. 29 vlgg.

Ulshöfer, Robert. Methodik des Deutschunterrichts (Voor AVO/VWO speciaal van belang Mittelstufe I en II, 6e en 4e dr. Stuttgart 1966).

Whitehead, Frank, The disappearing dais. A study of the principles and practice of English teaching. 3e dr. London, 1968.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Het bestuur zou gaarne aan de leden enige korte mededelingen willen doen over een aantal activiteiten die voor de wiskundecollega's georganiseerd zullen worden.

1 Reeds geruime tijd is er een *commissie* aan het werk, om, analoog aan de '250 Opgaven' *een verzameling vraagstukken* te maken, die ongeveer het niveau van het toekomstige wiskunde eindexamen van het vwo zullen aangeven. Zodra deze groep collega's, waarvan Dr. Ir. B. Groeneveld de coördinator is, met haar werk gereed is, zal het resultaat in een opgavenverzameling gepubliceerd worden, vermoedelijk eind volgend jaar.

2 Sinds kort is er een *Nomenclatuurcommissie* aan het werk onder leiding van Dr. P. G. J. Vredenduin. Deze is begonnen met te proberen enigszins orde te scheppen in de chaos van nieuwe tekens en symbolen. Gepoogd zal worden om daarna een voorstel te doen, om zo veel mogelijk eenvormigheid te krijgen in de gebruikte symbolen, definities en begrippen. Het eerste resultaat hiervan is eind van dit jaar te verwachten.

3 Tenslotte de *didaktiekcommissie,* die juist onder leiding van ondergetekende met haar werkzaamheden begonnen is en wel met eerst te bespreken wat haar taak moet zijn. 't Is duidelijk dat deze commissie in beginsel een overzicht moet zien te krijgen van de verschillende didaktische methoden en hulpmiddelen. Zowel van de oude, in de praktijk beproefde, als van de nieuwe waarmee dikwijls nog te weinig wetenschappelijk geëxperimenteerd is. Maar daarna zullen de verschillende methodes nader bekeken moeten worden, zal er misschien een doelstellingenonderzoek voor de wiskunde nodig zijn, zal b.v. onderzocht moeten worden hoeveel van de deductieve methode, vooral in de meetkunde, op het vwo, het havo en het mavo bewaard moet blijven. Dit zijn maar enkele van de onderwerpen, die nader beschouwd moeten worden, wil een werkelijke vernieuwing van ons wiskundeonderwijs verantwoord gebeuren.

Het zijn alle drie commissie's ingesteld door de Vereniging, maar die in nauwe samenwerking met de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde hun werk zullen moeten doen. Suggesties van collega's zullen natuurlijk hartelijk welkom zijn.

Dr. J. K. van den Briel, voorzitter.

Korrel CLX

Afgeleide en monotonie

De hardnekkigheid van het bestaan van de 'stelling':
ALS f een differentieerbare functie is op een (eindig of oneindig) open interval I van R en voor zekere $a \in I$ geldt: $f'(a) > 0$,
DAN is er een omgeving V van a waarvoor geldt: f is stijgend op V,
vraagt om een schot hagel.
Hier volgt een tegenvoorbeeld:

$$f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}\colon \begin{cases} f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \frac{1}{2}x \text{ als } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

i) f is kennelijk differentieerbaar in elk element van $\mathrm{R} \setminus \{0\}$; f is eveneens differentieerbaar in 0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} + \frac{1}{2}h}{h} = \tfrac{1}{2};$$

dus:

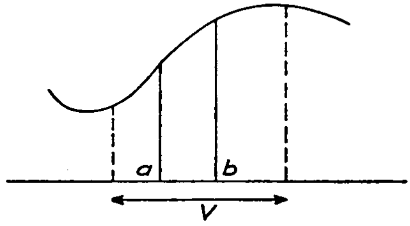
$$f'\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}\colon \begin{cases} f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} + \frac{1}{2} \text{ als } x \neq 0, \\ f'(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

dus: $\boxed{f \text{ is een differentieerbare functie op R en } f'(0) = \tfrac{1}{2} > 0.}$

ii) Evenwel:

$\boxed{\text{er is } \textit{geen} \text{ omgeving } V \text{ van 0 waarvoor geldt: } f \text{ is stijgend op } V.}$

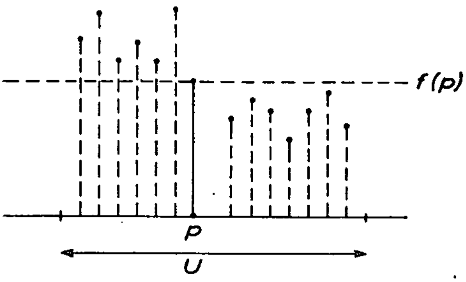
We merken eerst even op:
a) we noemen een functie f stijgend op een open interval V, als voor alle $a, b \in V$: $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.



Bovendien

b) Als g: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ differentieerbaar is in $p \in \mathrm{R}$, en $g'(p) < 0$, dan is er een omgeving U van p, zodat voor alle $x \in U$:

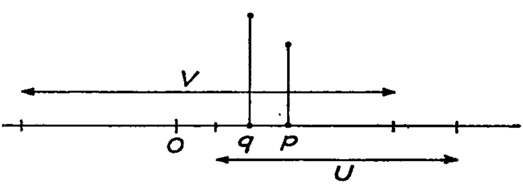
$$[x < p \Rightarrow g(x) > g(p)] \text{ en } [x > p \Rightarrow g(x) < g(p)].$$



We keren terug tot de eerder gedefinieerde functie f.
Laat V een omgeving zijn van 0;
er is een natuurlijk getal k zodat: $\dfrac{1}{2\pi k} \in V$;
neem zo'n k en noem het: k_0; noem $\dfrac{1}{2\pi k_0}$: p;
dan: $f'(p) = 2 \cdot p \cdot \sin\dfrac{1}{p} - \cos\dfrac{1}{p} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$;
kies een omgeving U van p met de eigenschap:

$$x < p \Rightarrow f(x) > f(p) \text{ voor alle } x \in U,$$

(volgens (b) is zo'n U er);
kies nu een getal q met: $q < p$, $q \in U \cap V$;
dan: $p \in V$, $q \in V$, $q < p$, $f(q) > f(p)$.



Dus: *f is niet stijgend op V.*
De gewraakte stelling heeft zijn diensten bewezen bij het berekenen van extremen. Zijn werk kan worden overgenomen door de volgende stelling die terdege recht heeft van bestaan:
ALS f: $I \to \mathrm{R}$ (I is een interval) een differentieerbare functie is, en voor alle $x \in I$ geldt: $f'(x) > 0$,
DAN is f stijgend op I.

A. J. Th. Maassen.
Nijmegen

De Eindexamens 1970

Wederom drukken we af de examenopgaven van de experimentele vwo-scholen, van de havoscholen en de mavo-3-scholen (programma B). Tevens die voor mavo-4 (modern B-programma). Evenals dat voor mavo-3 werd een deel in meerkeuzevorm gegeven. Het tweede deel werd op de oude wijze (open vragen) geëxamineerd).

Algebra-VWO ($2\frac{1}{2}$ uur)

1 a Bereken $\int_0^5 \frac{x\,dx}{x^2+10}$.

b Welke is de vergelijking van de integraalkromme van de differentiaalvergelijking $(1+x^2)dy = (y+1)dx$, die door het punt $(1, 0)$ gaat?

c Bereken $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cos x\, dx$.

2 a Gegeven is de functie: $x \to 2x^2e^{-x}+1$.
Bereken de uiterste waarden van deze functie.
Onderzoek of de grafiek van de functie een asymptoot heeft.
Teken de grafiek van de functie.
Beschouw de verzameling F van de functies van x gedefinieerd door:
$x \to ax^2\mathrm{e}^{-x}+1$.

b Bewijs dat de grafieken van de functies uit F slechts één punt gemeen hebben.
Welk punt is dat?

c Van welke functie uit F raakt de grafiek de X-as?

3 Gegeven is de differentiaalvergelijking $2y\,dy-4x\,dx = x\,dy+y\,dx$.
In deze opgave wordt met lijnelement bedoeld: lijnelement dat aan deze differentiaalvergelijking voldoet.

a Bewijs dat alle integraalkrommen die niet door de oorsprong gaan, de X-as onder dezelfde hoek snijden.

b Wat is de verzameling van de punten waarin de lijnelementen evenwijdig aan de X-as zijn?
Wat is de verzameling van de punten waarin de lijnelementen evenwijdig aan de Y-as zijn?

c De verzameling van de punten waarin de lijnelementen een richtingscoëfficient m hebben, noemt men V_m.
Bewijs dat V_m voor elke m een rechte lijn is.

d Wat is de verzameling van de punten waarin de lijnelementen een positieve richtingscoëfficient hebben? Teken deze verzameling.

e Indien gegeven is dat een functie $y = f(x)$ die aan de differentiaalvergelijking voldoet, een uiterste waarde 4 heeft, is deze uiterste waarde dan een maximum of een minimum?

f Los de differentiaalvergelijking op.

Stereometrie-VWO (2½ uur)

In de vraagstukken 1, 2 en 3 hebben de gebruikte coördinaten betrekking op een positief georiënteerde orthonormale basis $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ van de ruimte. De afkorting p.v. betekent parametervoorstelling.

1 Gegeven zijn de lijn l met p.v. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

en de punten A: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en B: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a op de lijn l ligt een punt P zo dat $\angle APB$ recht is.
Bereken de coördinaten van P.

b Op de lijn l ligt een punt Q zo dat $\triangle ABQ$ gelijkzijdig is.
Bereken de coördinaten van Q.

2 Gegeven zijn de lijn l met p.v. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
en het vlak V met vergelijking $x_1+3x_3-6 = 0$.

a Stel een p.v. op van de projectie van l op V.

b De drager van $\underline{e}_1$ snijdt V in het punt A.
De lijn m gaat door A, ligt in V en staat loodrecht op l.
Stel een p.v. op van de lijn m.

3 Gegeven zijn het vlak U met vergelijking $x_1-x_2-8 = 0$,
het vlak V met vergelijking $5x_1-x_3+16 = 0$,
het vlak W met vergelijking $3x_1-x_2+14 = 0$,
en de bol B met vergelijking $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 24$.
τ is een translatie met translatievector $\underline{t}$ waarvan de drager parallel is aan de snijlijn van V en W.
τB snijdt U volgens een cirkel waarvan de straal gelijk is aan 4.
Bereken de kentallen van $\underline{t}$.

4 Gegeven is een parallellogram $ABCD$ gelegen in een vlak dat niet door de oorsprong gaat. De diagonalen van $ABCD$ snijden elkaar in het punt S. De plaatsvectoren van A, B, C en D zijn respectievelijk $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$. Op de drager van $\underline{a}$ ligt een punt P met plaatsvector $\alpha \underline{a}$ en op de drager van $\underline{c}$ ligt een punt Q met plaatsvector $\gamma \underline{c}$.
De lijn door P en Q gaat door S.

a Bereken γ voor het geval dat $\alpha = \frac{3}{4}$.

b Bewijs dat bij veranderlijke α en γ geldt: $\alpha+\gamma = 2\alpha\gamma$, mits $\alpha \neq \frac{1}{2}$ en $\gamma \neq \frac{1}{2}$.

c Verder is gegeven dat $||\underline{a}|| = ||\underline{c}||$ en $(\underline{a}, \underline{b}+\underline{c}+\underline{d}) = 0$.
Bereken de hoek van de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{c}$.

Goniometrie en analytische meetkunde-VWO ($2\frac{1}{2}$ uur)

1 De in dit vraagstuk gebruikte coördinaten hebben betrekking op een orthonormale basis van het vlak.

Gegeven zijn de lijn l met parametervoorstelling $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

de lijn m met parametervoorstelling $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

en het punt P: $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Het snijpunt van de lijnen l en m is het punt S.

a Stel een vergelijking op van elk van de lijnen door P die gelijke hoeken maken met l en m.

b P is het zwaartepunt van driehoek ABS, waarbij A op l en B op m ligt. Bereken de coördinaten van A en B.

2 De in dit vraagstuk gebruikte coördinaten hebben betrekking op een orthonormale basis van het vlak.

Gegeven zijn de lijn l met vergelijking $x_1+2x_2-18 = 0$

en de cirkel C_1 met vergelijking $(x_1-6)^2+(x_2+1)^2 = 20$,

waarop de punten A: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en B: $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ liggen.

a De raaklijnen in A en in B aan de cirkel C_1 snijden elkaar in P. Bereken de coördinaten van P.

b C_2 is een cirkel die zowel l als C_1 raakt en wel zo dat P gelijke machten heeft ten opzichte van C_1 en C_2.

Bereken de coördinaten van de middelpunten van de drie cirkels C_2.

3 Gegeven zijn drie verschillende vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$, die gelijke lengte hebben. De vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ zijn de plaatsvectoren van respectievelijk de punten A, B en C.

a Bewijs dat het punt D met plaatsvector $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ het hoogtepunt van driehoek ABC is.

b E is het punt met plaatsvector $\underline{a}+\underline{c}$ en F is het punt met plaatsvector $\underline{b}+\underline{c}$.

Bewijs dat C op de lijn door E en F ligt dan en slechts dan als het stelsel $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ afhankelijk is.

4 De functie f is voor $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gedefinieerd door

$f(x) = 2\sin^2 x + p\sin x$, waarbij $p > 0$.

a Neem $p = \sqrt{3}$ en los op de ongelijkheid $f(x) < 0$.

b Voor welke waarden van p heeft de grafiek van f minder dan vijf verschillende punten met het gegeven interval van de X-as gemeen?

c Bewijs dat $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ een absoluut maximum van de functie is.

Wiskunde-HAVO (3 uur)

1 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de punten $A(-3, -1)$ en $B(5, 5)$.

a Stel de vergelijkingen op van de lijnen die een hoek van 45° met de positieve X-as maken en die tot A een afstand $2\sqrt{2}$ hebben.

b Van een gelijkbenige driehoek ABC met basis AB ligt de top C op de X-as. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.

2 De functie f is gedefinieerd door $f(x) = {}^{g}\log (x+2g)$, waarbij g een constante is.

a Bereken g voor het geval dat $f(3) = 2$.

b Neem $g = 2$ en los op: $f(x) < -1$.

3 In een kubus $ABCD.EFGH$ met ribbe $2p$ is P het midden van de ribbe AB en Q het midden van de ribbe GH.

a Druk de inhoud van het viervlak $EHPQ$ uit in p.

b Bereken de cosinus van de hoek van de lijnen BG en EQ.

c Bewijs dat de lijnstukken CE en PQ elkaar loodrecht middendoor delen.

4 De functie f is gedefinieerd door $f(x) = 2\sqrt{x}$.

a Teken voor $x \leqq 9$ de grafiek van f.

De punten $A(p, 0)$ met $0 < p < 6$ en $B(6, 0)$ zijn de hoekpunten van een rechthoek $ABCD$, waarbij hoekpunt D op de grafiek van f ligt.

b Druk de oppervlakte van de rechthoek $ABCD$ uit in p.

c Bereken de waarde van p waarvoor de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ maximaal is.

5 De functie f is voor $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gedefinieerd door $f(x) = p+4 \sin \frac{1}{2}x$ waarbij p een constante is.

a Bereken de hoek waaronder de grafiek van f de lijn met vergelijking $x = \frac{1}{3}\pi$ snijdt.

b Bereken p voor het geval de grafiek van f de X-as raakt.

c Los op: $f(x)-f(\pi-x) = 4$.

6 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de parabool met vergelijking $y^2 = 2x$ en de lijn l met vergelijking $y = 2x-6$.
De lijn l snijdt de parabool in de punten A en B, waarbij $OA < OB$.

a Bereken de hoek waaronder l de parabool in A snijdt.

b Een lijn evenwijdig aan de X-as snijdt de parabool in C en snijdt l in D. Punt D doorloopt het lijnstuk AB.
Bereken de maximale lengte van lijnstuk CD.

Wiskunde I MAVO-3 programma B ($1\frac{1}{2}$ uur)

Bij elk van de volgende opgaven staan vier antwoorden vermeld, voorafgegaan door de letters **a, b, c** en **d**. Eén van deze antwoorden is goed. Teken een kringetje om de letter voor het goede antwoord.

1 De translatie $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ beeldt het punt (7, −3) af op het punt

a (4, −10), **b** (4, 4), **c** (10, 4), **d** (14, −6).

2 Het beeld van het punt (1, 6) bij spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$ is

a (−1, −6), **b** (1−, 6), **c** (1, −6), **d** (6, 1).

3 Het beeld van het punt (5, 3) bij spiegeling in het punt (3, 1) is

a (1, −1), **b** (5, −1), **c** (7, 5), **d** (8, 4).

4 I Een vierkant kan op 8 verschillende manieren op zichzelf worden afgebeeld.
II Een gelijkzijdige driehoek kan op 6 verschillende manieren op zichzelf worden afgebeeld.

a I en II zijn beide waar, **b** alleen I is waar, **c** alleen II is waar, **d** I en II zijn beide niet waar.

5 De verzameling V bevat 10 elementen en de verzameling W bevat 12 elementen. $V \cap W$ bevat 4 elementen.
Het aantal elementen van $V \cup W$ bedraagt

a 14, **b** 18, **c** 22, **d** 26.

6 De waarde van $2a^2b-ab^2$ voor $a = -2$ en $b = 3$ is

a −6, **b** 6, **c** 12, **d** 42.

7 Bij ontbinding in faktoren van $x^2+4x-12$ kan één van de faktoren zijn:

a $x-6$, **b** $x+2$, **c** $x+4$, **d** $x+6$

8 $(x-3)^2 =$

a x^2-9, **b** x^2+9, **c** x^2-3x+9, **d** x^2-6x+9.

9 De oplossingsverzameling van de vergelijking $x(x-4) = 5$ bevat

a twee positieve getallen, **b** twee negatieve getallen, **c** één positief en één negatief getal, **d** het getal nul en een positief getal.

10 De middens van de zijden van rechthoek $ABCD$ zijn de hoekpunten van de vierhoek $PQRS$.
De verhouding van de oppervlakten van $ABCD$ en $PQRS$ is

a $\sqrt{2} : 1$, **b** $2 : 1$, **c** $2\sqrt{2} : 1$, **d** $4 : 1$.

11 Een vierhoek met precies één symmetrieas kan zijn

a een vlieger, **b** een ruit, **c** een rechthoek, **d** een parallellogram.

12 Van een rechthoekige driehoek is de schuine zijde 13 en een rechthoekszijde 12. De cosinus van de kleinste hoek in deze driehoek is gelijk aan

a 5/13, **b** 5/12, **c** 12/13, **d** 13/12.

13 De grafiek van de relatie $y = 4x+3$ is evenwijdig aan de grafiek van de relatie

a $\frac{1}{2}y = 2x+1$, **b** $y = \frac{1}{4}x+3$, **c** $2y = 2x+1\frac{1}{2}$, **d** $2y = 4x+3$.

14 Een lijn met vergelijking $y = x+1$ wordt gespiegeld in de Y-as. De vergelijking van het spiegelbeeld is

a $y = -x+1$, **b** $y = x-1$, **c** $-y = x+1$, **d** $-y = -x-1$.

15 De bewering $x^2-2x-35 = (x+7)(x-5)$ is waar voor

a alle waarden van x, **b** precies twee waarden van x, **c** precies één waarde van x, **d** geen enkele waarde van x.

16 Van een functie f, gedefinieerd door $f(x) = 3x+a$, is gegeven dat $f(1) = 2$. $f(0)$ is gelijk aan

a -2, **b** -1, **c** 0, **d** 2.

17 De oplossingsverzameling van het stelsel vergelijkingen $3x-2y = 6$ en $2x-3y = -6$ is het getallenpaar (a, b). Daarvoor geldt

a a en b zijn beide positief, **b** a is positief, b is negatief, **c** a is negatief, b is positief, **d** a en b zijn beide negatief.

18 In een cirkel met straal r is een vierkant beschreven. De oppervlakte van het vierkant is

a r^2, **b** $r^2\sqrt{2}$, **c** $2r^2$, **d** $4r^2$.

19 Twee evenwijdige lijnen worden door een derde lijn gesneden. Het aantal punten dat evenver ligt van deze drie lijnen bedraagt

a 0, **b** 2, **c** 4, **d** 6.

20 Een kubus past precies in een doos. Eén hoekpunt van de kubus noemt men A, één hoekpunt van de doos noemt men B.
Op hoeveel manieren kan men de kubus in de doos passen met hoekpunt A in hoek B?

a een manier, **b** twee manieren, **c** drie manieren, **d** vier manieren.

21 Van twee vierkanten verhouden de zijden zich als 4 : 9.
I de omtrekken verhouden zich als 2 : 3
II de oppervlakten verhouden zich als 4 : 9.

a I en II zijn beide waar, **b** alleen I is waar, **c** alleen II is waar, **d** I en II zijn beide niet waar.

22 Van $\triangle ABC$ is $AB = 8$, $\angle A = 35°$ en $\angle B = 90°$.
Welk van de volgende getallen verschilt het minst van de lengte van BC?

a 5,6, **b** 6,0, **c** 10,0, **d** 11,4.

23 Van een functie $\{(x, y)|y = x^2-1\}$ is het domein $\{x|-2 \leqq x \leqq 3\}$.
Het bereik van deze functie is

a $\{y|-5 \leqq y \leqq 8\}$, **b** $\{y|-2 \leqq y \leqq 3\}$, **c** $\{y|-1 \leqq y \leqq 8\}$, **d** $\{y|3 \leqq y \leqq 8\}$.

24 I De grafieken van de functies $x \to 3x+3$ en $x \to 2x+2$ hebben geen punt met elkaar gemeen.

II De grafieken van de functies $x \to 3x^2+3$ en $x \to 2x^2+2$ hebben geen punt met elkaar gemeen.

a I en II zijn beide waar, **b** alleen I is waar, **c** alleen II is waar, **d** I en II zijn beide niet waar.

25 Op een school kiest iedere leerling voor zijn examen ten minste één vreemde taal. 14 leerlingen kiezen Frans, 14 Duits en 19 Engels. Van deze leerlingen kiezen er 7 Frans èn Duits, 10 Frans èn Engels, 9 Duits èn Engels. Hieronder zijn weer 4 leerlingen die alle drie de talen kiezen.
Hoeveel leerlingen doen examen?

a 17, **b** 25, **c** 43, **d** 47.

Wiskunde II MAVO-3 programma B ($1\frac{1}{2}$ uur)

1 In een klas van 30 leerlingen worden voor een wiskundeproefwerk de volgende cijfers behaald:
6 – 8 – 6 – 6 – 7 – 7 – 5 – 8 – 8 – 6 – 7 – 8 – 8 – 7 – 4 – 8 – 6 – 5 – 8 – 8 – 6 – 7 – 5 – 8 – 7 – 7 – 10 – 9 – 4 – 8.

a Teken een histogram van deze resultaten.
b Bepaal de modus en de mediaan.
c Bereken het gemiddelde.

2 Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY zijn gegeven de punten $A(8, 6)$ en $B(5, 10)$.

a Bewijs dat $\triangle\ OAB$ rechthoekig is.
b Bereken de tangens van $\angle\ AOB$; benader deze hoek in graden nauwkeurig.
c Punt C is het vierde hoekpunt van rechthoek $OABC$. Bereken de coördinaten van C.

3 De functies f en g zijn gedefinieerd door
$f(x) = x^2-2x-3$ en $g(x) = 2x-3$.

a Bereken $f(0)$ en $f(2)$.
b Los op $f(x) = 0$.
c Bereken de kleinste waarde van $f(x)$.
d Los op $f(x) = g(x)$.
e Teken in één figuur de grafieken van de functies f en g.

4 Teken nauwkeurig een gelijkzijdige driehoek ABC.
Het spiegelbeeld van punt A in de lijn BC noemt men P.
Het spiegelbeeld van punt P in de lijn AC noemt men Q.

a Toon aan dat $\triangle\ APQ$ gelijkzijdig is.
b Toon aan dat $ABPQ$ een vlieger is.
c Onderzoek welk deel de oppervlakte van driehoek ABC van de oppervlakte van vierhoek $ABPQ$ is.

Wiskunde I MAVO-4 serie B (2 uur)

De items 1 t/m 10 zijn geheel gelijk aan het eerste tiental van mavo-3-wiskunde I. Wij mogen daarnaar verwijzen.

11 Het getal $\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ wordt het best benaderd door

a 2,42, **b** 2,44, **c** 2,46, **d** 2,48.

12 De richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten $A(-2, 1)$ en $B(5, -2)$ is gelijk aan

a $-7/3$, **b** $-3/7$, **c** $3/7$, **d** $7/3$.

13 Gegeven $p-q = -3$. Dan is $p^2-2pq+q^2+p-q$

a gelijk aan 6, **b** gelijk aan -12, **c** gelijk aan 12, **d** zonder verdere gegevens niet te berekenen.

14 De vergelijking $\frac{1}{3}(x-6)(2x+9) = -1$ is gelijkwaardig met:

a $2x^2-3x-51 = 0$, **b** $2x^2-21x-51 = 0$, **c** $2x^2-3x-53 = 0$, **d** $2x^2-21x-53 = 0$.

15 De punten $P(3, 6)$, $Q(1, 2)$ en $R(8, 1)$ zijn de hoekpunten van het parallellogram $PQRS$. De coördinaten van het hoekpunt S zijn

a (9, 5), **b** (9, 6), **c** (10, 5), **d** (10, 6).

16 *Vl* is de verzameling van de vliegers.
Ru is de verzameling van de ruiten.
Vi is de verzameling van de vierkanten.
Re is de verzameling van de rechthoeken.

a $Vl \cup Ru = Vl$, **b** $Ru \cap Vi = Re$, **c** $Vl \subset Ru$, **d** $Re \subset Vi$

17 I Er is precies één waarde van x waarvoor geldt $x^2 = 4x$
II Er is precies één waarde van x waarvoor geldt $x^2+4x = -4$.

a I en II zijn beide waar, **b** alleen I is waar, **c** alleen II is waar, **d** I en II zijn beide niet waar.

18 I Door de translatie $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ gaat de grafiek van $x \to x^2$ over in de grafiek van $x \to x^2+2$.

II Door de translatie $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ gaat de grafiek van $x \to x^2$ over in de grafiek van $x \to (x+2)^2$.

a I en II zijn beide waar, **b** alleen I is waar, **c** alleen II is waar, **d** I en II zijn beide niet waar.

19 Een vergelijking van de lijn door de punten (4, 0) en (0, 6) is

a $2x+3y = 12$, **b** $3x+2y = 12$, **c** $3x+2y = 24$, **d** $2x+3y = 26$.

20 I De figuur van twee snijdende cirkels heeft in elk geval twee symmetrie-assen.
II De figuur van twee cirkels waarvan er een geheel binnen de ander ligt heeft ten minste twee symmetrieassen.

a I en II zijn beide waar, **b** alleen I is waar, **c** alleen II is waar, **d** I en II zijn beide niet waar.

21 De functie f is gedefinieerd door $f(x) = x^2-2x-3$.
De kleinste waarde die $f(x)$ kan aannemen is

a -4, **b** -3, **c** -2, **d** 0.

22 Van driehoek I zijn de zijden 6, 6 en 8.
Van driehoek II zijn de zijden 8, 8 en 12.
Van driehoek III zijn de zijden 12, 12 en 18.

a Geen van deze driehoeken is gelijkvormig met een van de andere
b Alleen de driehoeken I en II zijn gelijkvormig
c Alleen de driehoeken II en III zijn gelijkvormig
d Elk van deze driehoeken is met de beide andere gelijkvormig.

23 De functie $x \to 2x+5$ beeldt -1 af op p en beeldt q af op -1.

a $p = -3$ en $q = 3$, **b** $p = -2$ en $q = 3$, **c** $p = 3$ en $q = -2$, **d** $p = 3$ en $q = -3$.

24 I De grafieken van de functies $x \to x^2+2$ en $x \to x^2-2$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de X-as.
II De grafieken van de functies $x \to 2x^2$ en $x \to -2x^2$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de X-as.

a I en II zijn beide waar, **b** alleen I is waar, **c** alleen II is waar, **d** I en II zijn beide niet waar.

25 De oplossingsverzameling van de vergelijking $\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = x+1$ bevat

a precies één getal, **b** precies twee getallen, **c** alle getallen, **d** alle getallen op één na.

26 Gegeven is de functie $\{(x, y)|y = \frac{1}{2}x^2-5\}$.
I Als het domein is $\{x|-4 \leqq x \leqq -2\}$ dan is het bereik $\{y|-3 \leqq y \leqq 3\}$.
II Als het domein is $\{x|-2 \leqq x \leqq 1\}$, dan is het bereik $\{y|-4\frac{1}{2} \leqq y \leqq -3\}$.

a I en II zijn beide waar, **b** alleen I is waar, **c** alleen II is waar, **d** I en II zijn beide niet waar.

27 *ABCD* is een ruit met zijde a.
I De oppervlakte van *ABCD* is $a^2 \cdot \sin \angle A$
II De oppervlakte van *ABCD* is $a^2 \cdot \sin \angle B$.

a I en II zijn beide waar, **b** alleen I is waar, **c** alleen II is waar, **d** I en II zijn beide niet waar.

28 Het punt (p, q) wordt gespiegeld in de lijn met vergelijking $y = 2$. Het beeldpunt is

a $(p+2, q)$, **b** $(4-p, q)$, **c** $(p, 4-q)$, **d** $(p, q+2)$.

29 De oplossingsverzameling van de relatie $\{(x, y)|(x+3)^2+(y-2)^2 \leqq 0\}$

a is leeg, **b** bevat precies één element, **c** bevat meer dan één, doch een eindig aantal elementen, **d** bevat oneindig veel elementen.

30 De functie f, gedefinieerd door $f(x) = -x^2+6x-8$, heeft *geen* positieve functiewaarden voor

a geen enkele waarde van x, **b** alle waarden van x, **c** alle positieve waarden van x, **d** alle negatieve waarden van x.

Wiskunde II MAVO-4 serie B (2 uur)

1 Teken ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel XOY een driehoek met de hoekpunten $A(1, 2)$, $B(5, 3)$, en $C(2, 5)$.

a Spiegel $\triangle ABC$ in de X-as. Noem het beeld $\triangle A'B'C'$ (A' is het beeld van A, enz.). Wat zijn de coördinaten van A', B' en C'?

b Spiegel $\triangle ABC$ in de Y-as, Noem het beeld $\triangle A''B''C''$. Wat zijn de coördinaten van A'', B'' en C''?

c Beschrijf duidelijk een transformatie waarbij $\triangle A''B''C''$ het beeld is van $\triangle A'B'C'$.

d Welke twee betrekkingen bestaan er tussen de lijnstukken $A''B'$ en $B''A'$? Beredeneer het antwoord.

2 Teken een vierkant $ABCD$ met zijden van 6 cm.
S is het snijpunt van de diagonalen.
Het volgende heeft alleen betrekking op punten binnen het vierkant.
U is de verzameling van de punten die dichter bij B dan bij A liggen.
V is de verzameling van de punten die dichter bij DC dan bij BC liggen.
W is de verzameling van de punten die meer dan 2 cm van S verwijderd zijn.

a Noem de figuur waarvan het binnengebied met U samenvalt; zet daartoe letters bij de hoekpunten.

b Noem de figuur waarvan het binnengebied met V samenvalt.

c Geef in de tekening door arcering aan de verzameling $U \cap V \cap W$.

d Geef in de tekening duidelijk aan de verzameling van de punten die precies 2 cm van S verwijderd zijn, dichter bij A dan bij C liggen en dichter bij AD dan bij BC liggen.

3 Van de balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 6$, $BC = 4$ en $AE = 4$. P is het midden van FG.

a Bereken de lengte van de lichaamsdiagonaal BH.

b Bereken de cosinus van $\angle BPH$; benader deze hoek in graden nauwkeurig.

4 Gegeven de functies $f: x \to x^2-2x-3$ en $g: x \to -2x+1$.

a Bereken de nulpunten en de uiterste waarde van $f(x)$.

b Bereken $\{(x, y)|y = x^2-2x-3\} \cap \{(x, y)|y = -2x+1\}$.

c Teken in een figuur de grafieken van f en g.

d Geef in de tekening de roosterpunten van de puntverzameling $\{(x, y)|y > x^2-2x-3\} \cap \{(x, y)|y < -2x+1\}$ met stippen aan en schrijf hun aantal op.

5 In een klas van 30 leerlingen worden voor een wiskundeproefwerk de volgende cijfers behaald:
7 - 9 - 5 - 6 - 7 - 7 - 4 - 6 - 7 - 5 - 7 - 8 - 10 - 7 - 3
8 - 6 - 5 - 9 - 7 - 8 - 6 - 5 - 8 - 6 - 7 - 10 - 9 - 4 - 8.
Voor een tweede proefwerk worden de volgende cijfers behaald:
6 - 8 - 5 - 5 - 6 - 6 - 4 - 7 - 7 - 5 - 6 - 7 - 8 - 6 - 3
7 - 5 - 4 - 8 - 7 - 9 - 6 - 4 - 8 - 6 - 6 - 9 - 8 - 3 - 7.

a Maak voor elk van de cijferreeksen een frekwentietabel; bepaal mediaan en gemiddelde.

b Verenig de cijferreeksen tot één reeks van 60 cijfers en teken hiervan een histogram. Bepaal mediaan en gemiddelde.

c Kan het gemiddelde van de totaalreeks uit de gemiddelden van de beide deelreeksen worden afgeleid? Licht het antwoord toe.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

STATUTEN*

Artikel 1. De vereniging heet: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, en is gevestigd te Amsterdam. Zij is een voortzetting van de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea (Wimecos).

Artikel 2. De vereniging is opgericht op 13 december 1925 en is opnieuw aangegaan voor de duur van 29 jaren te rekenen vanaf 23 december 1968, derhalve eindigende op 22 december 1997.

Artikel 3. Het doel van de vereniging is aan de leden gelegenheid te geven van gedachten te wisselen over alle onderwerpen, die betrekking hebben op het onderwijs in de wiskunde aan scholen genoemd in de Wet op het Voortgezet Onderwijs en voorts het behartigen van de belangen van dit onderwijs.

Artikel 4. De vereniging tracht haar doel te bereiken
a door het houden van vergaderingen van de leden;
b door het doen van publikaties;
c door het nemen van andere maatregelen, die tot het bereiken van het doel wenselijk worden geacht.

Artikel 5. Ten minste éénmaal per verenigingsjaar wordt een algemene ledenvergadering gehouden, waarin het bestuur verslag uitbrengt over het afgelopen verenigingsjaar. Andere algemene ledenvergaderingen worden gehouden in de gevallen aan te geven in het huishoudelijk reglement.

Artikel 6. Het verenigingsjaar loopt van 1 augustus tot en met 31 juli daaropvolgend.

Artikel 7. Lid kunnen worden leraren in de wiskunde aan scholen, als bedoeld in de Wet op het Voortgezet Onderwijs. Door het bestuur kunnen ook tot lid worden toegelaten andere personen op wier lidmaatschap in verband met het doel van de vereniging prijs wordt gesteld. Voorts kent de vereniging ereleden: zij, die daartoe door de algemene ledenvergadering zijn benoemd. Ereleden hebben stemrecht en betalen geen contributie.

Artikel 8. Hij, die lid der vereniging wenst te worden, dient een verzoek tot toelating in bij het bestuur.

Artikel 9. Het lidmaatschap eindigt:
a door schriftelijke opzegging aan het bestuur;
b door overlijden;
c door royement.
Opzegging is slechts mogelijk met ingang van een nieuw verenigingsjaar en dient plaats te vinden ten minste één maand daaraanvoorafgaande. Royement vindt plaats door een daartoe strekkend besluit van de algemene ledenvergadering met een meerderheid van ten minste tweederde der geldig uitgebrachte stemmen.

Artikel 10. De algemene ledenvergadering stelt een huishoudelijk reglement vast ter uitwerking van deze statuten. Het huishoudelijk reglement mag geen bepalingen bevatten, die strijdig zijn met deze statuten.

---

* Goedgekeurd bij Koninklijk besluit, dd. 20 juni 1969, nr. 15.

Artikel 11. De leden betalen jaarlijks een contributie, die wordt vastgesteld door de algemene ledenvergadering. De contributie is invorderbaar bij de aanvang van het verenigingsjaar.

Artikel 12. De leiding van de vereniging is opgedragen aan het bestuur. Het bestuur wordt door de algemene ledenvergadering verkozen uit de leden van de vereniging. Het bestaat uit ten minste vijf leden, waaronder een voorzitter, een secretaris en een penningmeester. De functies van secretaris en penningmeester kunnen echter door één persoon vervuld worden. De zittingsduur alsmede de wijze van benoeming en aftreding van de leden van het bestuur worden geregeld in het huishoudelijk reglement.

Artikel 13. De vereniging wordt in en buiten rechte vertegenwoordigd door ten minste twee bestuursleden, waaronder de voorzitter, de secretaris of de penningmeester.

Artikel 14. Een besluit tot wijziging der statuten of tot ontbinding der vereniging kan slechts worden genomen op voorstel van het bestuur of op voorstel van ten minste 25 leden. Het voorstel moet letterlijk in de oproeping tot de vergadering zijn vermeld. Het besluit kan slechts worden genomen door de algemene ledenvergadering met een meerderheid van ten minste tweederde der geldig uitgebrachte stemmen. Een besluit tot wijziging van de statuten treedt niet in werking, alvorens daarop de Koninklijke goedkeuring zal zijn verkregen.
Ingeval van een besluit tot ontbinding dient de algemene ledenvergadering tevens een beslissing te nemen over de bestemming van een mogelijk batig saldo, met inachtneming van het bepaalde in art. 1702 van het Burgerlijk Wetboek.

HUISHOUDELIJK REGLEMENT

Bestuur

Artikel 1

De leden van het bestuur worden verkozen voor een periode van drie jaar. Elk jaar dienen echter één of meer bestuursleden af te treden volgens een daartoe door het bestuur vast te stellen rooster. Een aftredend bestuurslid is terstond herkiesbaar.

Artikel 2

Het bestuur bepaalt, met inachtneming van het bepaalde in artikel 12 der statuten, het aantal bestuursleden. Kandidaten voor de functie van bestuurslid worden voorgedragen door het bestuur. Bij schriftelijke kennisgeving aan het bestuur door ten minste vijf leden binnen veertien dagen na kandidaatstelling kunnen tegenkandidaten worden ingediend.

Artikel 3

Indien voor een vacature meer dan één kandidaat is gesteld, geschiedt de verkiezing met gesloten briefjes en bij volstrekte meerderheid. Wordt deze bij eerste stemming niet verkregen, dan vindt herstemming plaats tussen de twee personen die bij de eerste stemming de meeste stemmen hebben verkregen; bij staken van stemmen beslist het lot. Is voor een vacature slechts één kandidaat gesteld, dan wordt deze geacht te zijn verkozen op de vijftiende dag na zijn kandidaatstelling.

Sectiecommissies

Artikel 4

Er zijn een of meer sectiecommissies, welke het bestuur bijstaan bij zijn taak en wel voor zover dit het onderwijs in de wiskunde betreft aan een of meer door het bestuur per sectiecommissie te bepalen type school, als genoemd in de Wet op het Voortgezet Onderwijs. De door een sectiecommissie te nemen maatregelen behoeven de goedkeuring van het bestuur.

Artikel 5

De sectiecommissies worden ingesteld door het bestuur en bestaan uit leden van de vereniging. De leden van de sectiecommissie worden aangewezen door het bestuur. In elke sectiecommissie heeft ten minste één bestuurslid zitting.

Artikel 6

Een sectiecommissie bestaat uit ten minste vijf leden. De meerderheid van de leden van een sectiecommissie, waaronder de voorzitter, bestaat uit leraren, die les geven aan een der schooltypen van de betrokken sectiecommissie.

Artikel 7

In afwijking van het bepaalde in artikel 5 van dit reglement heeft iedere sectiecommissie het recht uit zijn midden een lid aan te wijzen om zitting te nemen in een andere sectiecommissie.

Algemene Ledenvergaderingen

Artikel 8

De algemene ledenvergaderingen worden bijeengeroepen door het bestuur. De oproeping dient schriftelijk te geschieden, onder vermelding van de te behandelen onderwerpen en met een termijn van ten minste vier weken.

Artikel 9

De jaarlijkse algemene ledenvergadering, genoemd in artikel 5 van de statuten, dient gehouden te worden in de periode van 1 september tot 1 maart.

Artikel 10

In de oproeping voor de jaarlijkse algemene ledenvergadering deelt het bestuur mede welke bestuursleden voor aftreden in aanmerking komen en welke kandidaten door het bestuur voor de functie van bestuurslid worden voorgedragen.

Artikel 11

Indien, ingevolge het bepaalde in artikel 2 van dit reglement, tegenkandidaten zijn ingediend, geeft het bestuur daarvan ten minste één week vóór de algemene ledenvergadering kennis aan de leden.

Artikel 12

Indien binnen veertien dagen na de oproeping tot de algemene ledenvergadering ten minste vijf leden schriftelijk aan het bestuur hebben te kennen gegeven een bepaalde aangelegenheid op de agenda te willen zien opgenomen, geeft het bestuur daarvan ten minste één week vóór de algemene ledenvergadering kennis aan de leden.

Artikel 13

De penningmeester is belast met het financiële beheer en legt daarover rekening en verantwoording af op de jaarlijkse algemene ledenvergadering. Goedkeuring daarvan strekt de penningmeester tot décharge van het gevoerde beheer.

Artikel 14

Door de algemene ledenvergadering wordt een kascommissie benoemd, bestaande uit twee leden, tot het nazien van de rekening en verantwoording van de penningmeester. De kascommissie brengt van haar bevindingen verslag uit aan de algemene ledenvergadering.

Artikel 15

Naast de jaarlijkse algemene ledenvergadering zullen algemene ledenvergaderingen worden gehouden in de volgende gevallen:

a wanneer het bestuur dit wenselijk acht;

b wanneer een sectiecommissie of ten minste 25 leden schriftelijk de wens daartoe aan het bestuur te kennen geven.

Indien in het onder *b* genoemde geval niet binnen veertien dagen een oproeping voor een algemene ledenvergadering is geschied, hebben de verzoekers het recht zelf de vergadering namens het bestuur uit te schrijven.

Artikel 16

De algemene ledenvergadering staat onder leiding van de voorzitter van het bestuur en bij diens ontstentenis onder leiding van een der andere leden van het bestuur. Het bestuur kan echter de leiding opdragen aan een ander lid der vereniging. De algemene vergadering is bevoegd in haar leiding te voorzien, indien dit niet op grond van het voorgaande is geschied.

Artikel 17

Op een algemene ledenvergadering kunnen geen besluiten worden genomen over aangelegenheden, die niet, conform het bepaalde in de artikelen 8 en 12 van dit reglement, op de agenda voorkomen.

Artikel 18

Stemming over zaken geschiedt mondeling. Bij staken van stemmen over zaken wordt het voorstel geacht te zijn verworpen. Stemming over personen geschiedt met gesloten briefjes. Bij staken van stemmen over personen is de procedure van art. 3 van dit reglement van toepassing.

Algemene bepaling

Artikel 19

In de gevallen waarin de statuten of het huishoudelijk reglement niet voorzien, beslist het bestuur.

Internationale post-universitaire cursussen te Gent

Van maandag 17 t/m vrijdag 21 augustus 1970 worden te Gent-België deze cursussen weer gehouden en wel voor wiskunde, natuurkunde en scheikunde-biologie.

Op maandag zal gesproken worden door Prof. Dr. A. Hacquaert over '*La politique scientifique*'.

Het programma van de wiskundesectie vermeldt dan verder:

ma: Prof. Dr. H. Cartan (Parijs): *La nouvelle 'géométrie analytique'*.

di: 1 Prof. Dr. P. Wilker en Dr. J. Binz (Bern): *Zwei berühmte Sätze der Algebra.*
De bedoeling is de deelnemers tot actieve medewerking te bewegen; ze ontvangen schriftelijk een aantal algebraïsche problemen; daarvan delen ze op donderdag de oplossingen mee; discussie over oplossingswijzen en moeilijkheden; op vrijdag volgt daarover dan nog een voordracht.

2 Prof. Dr. G. Helmberg (Eindhoven): *Recurrence – an elementary chapter of ergodic theory.*

3 Prof. Dr. H. O. Singh Varma (Nijmegen): *Characteristic classes and power series.*

wo: 1 Prof. Dr. H. O. Singh Varma, zie dinsdag.

2 Prof. Dr. P. Dupont (Turijn): *La théorie des groupes et quelques-unes de ses applications en chimie.*

3 Prof. Dr. J. Teghem (Brussel): *Théorie de la mesure et calcul des probabilités.*

do: 1 Prof. Dr. H. Behnke (Münster).

2 Dr. J. Binz, zie dinsdag.

vr: 1 Prof. Dr. P. Wilker, zie dinsdag.

2 Prof. Dr. H. Griezel (Hannover): *Neuere Gesichtspunkte zum Aufbau des Zahlensystems*

Het geheel staat onder voorzitterschap van Prof. A. Cottenie.
Men kan aanmeldingsformulieren en het volledige programma aanvragen bij de heer P. Mispelter, Ministerie van Nationale Opvoeding en Nederlandse Cultuur, Rijksadministratief Centrum, wijk Arcades – 3e verd. Bureau 3.065 – 1010 Brussel. De kosten bedragen 100 BFrs voor de inschrijving, verder 135 BFrs per nacht voor logies en ontbijt (in een studentenhuis) en 50 BFrs per maaltijd. We bevelen de cursus gaarne aan.

Boekbespreking

Dr. C. A. van Klinkenberg, *Wat kunnen wij weten?* Elementaire inleiding tot de kennistheorie. Van Gorcum & Comp. N.V., Assen. 1969, 112 blz., *f* 8.90.

De vraag, die de schrijver wenst te beantwoorden, is: wat kunnen wij weten? De bij de beantwoording gevolgde methode is die van de journalistieke wijsbegeerte. Anders gezegd: als men snel leest, struikelt men niet. De kritische lezer ondervindt daarentegen nogal eens teleurstelling. Hoewel dit het hele werkje door het geval is, wil ik me hier beperken tot dat deel, dat waarschijnlijk voor de uitgever aanleiding is geweest het ter recensie aan Euclides voor te leggen.
Omdat de schrijver van oordeel is, dat denken zonder taal niet mogelijk is (hetgeen ik noch bestrijden, noch beamen wil), begint hij met een onderzoek van de taal en daarmee van de logica en de wiskunde. In een hoofdstuk van 15 bladzijden zet hij het wezen van wiskunde en logica uiteen tot en met axiomatisering, waterdichtheid, theorie van Gödel, diversiteit van logica's. Men vraagt zich enthousiast af, hoe dit mogelijk is. Welnu, bij lezing blijkt helaas, dat het niet mogelijk is. De schrijver is in dit hoofdstuk kennelijk sterk beïnvloed door de Exacte Logica van Freudenthal. Zowel de voorbeelden op blz. 33 als de getallen op blz. 35 zijn conform die in Exacte Logica. Het is dan ook verheugend, dat de schrijver, al is het wat laat, bij de tekst op blz. 37 Exacte Logica als bron opgeeft. Verder vindt men op deze bladzijde: 'In de *intuïtieve* logica (van onze landgenoot L. E. J. Brouwer) gaat de wet van het uitgesloten derde niet meer op. De beslissing, of men in een bepaald geval van een ander type logica dan de tweewaardige *gebruik moet maken,* is echter een kwestie van 'ja' of 'neen' en valt dus binnen het gebied van de tweewaardige logica.' (curs. van mij)

P. G. J. Vredenduin

Dr. A. van Dop, e.a.: *Moderne Algebra voor mavo*, Deel 2; 72 bldz. f 4,90, Uitg. Wolters-Noordhoff, Groningen.

Dit deel is bestemd voor het tweede leerjaar van een mavoschool. Het begint met een herhaling van de leerstof over de verzamelingen, behandeld in deel 1, waarna een verdere uitbreiding van deze leerstof volgt (vereniging, verschil, de universele verzameling en complement). Verder komen aan de orde: irrationele getallen, relaties, afbeeldingen, grafieken, lineaire funkties en wordt door allerlei voorbeelden van diagrammen een inleiding tot de statistiek gegeven. Het boekje sluit met een 'Algemene Herhaling', bestaande uit een vijftigtal vraagstukken.
De behandeling van de stof getuigt van een moderne aanpak en er worden veel voorbeelden gegeven alvorens tot de opgaven wordt overgegaan. Toch dringt zich de vraag op of sommige gedeelten van de stof, betreffende de irrationele getallen, niet te moeilijk zijn voor leerlingen van een tweede klas mavo.

J. F. Christophe.

M. Glaymann, *Formation continue des enseignants de la mathématique au niveau secondaire*; 90 bladz.; 1968; OCDL, 65 rue Claude-Bernard, Paris 5e.

Het *Unesco-instituut voor Pedagogiek* te Hamburg heeft zich ook reeds eerder voor problemen die op het wiskunde-onderwijs betrekking hebben ingezet. We wijzen bijvoorbeeld op het *International Education Achievement Project* (IEA), waarover uitvoerig wordt gerapporteerd in de *Resultaten van wiskundeonderwijs* van Wiegersma en Groen.
In oktober 1968 heeft het Instituut een internationale conferentie gewijd aan het probleem van de continue scholing van wiskundedocenten. In de voorbereiding van de conferentie heeft Papy (België) een belangrijke rol gespeeld; vertegenwoordiger voor Nederland was prof. Freudenthal; Wijdeveld en Van Dormolen waren als waarnemers aanwezig. Er waren 16 landen vertegenwoordigd.
De continue scholing van de wiskundedocent wordt gezien als een probleem van de eerste orde. 'Continuer à apprendre devient, à l'heure actuelle, une partie intégrante du métier'. Om de belangstelling van de leraar voor de continue nascholing gaande te houden is het noodzakelijk dat hij de relatie van de op de cursussen behandelde stof tot zijn dagelijkse taak duidelijk leert zien. Aan pedagogische, methodologische en didactische problemen wordt dan ook in dit rapport uitvoerig aandacht geschonken.
De eerste vraag die wordt beantwoord is die naar de doelstellingen van alle wiskunde-onderwijs, de tweede die naar de inhoud van de nascholingscursussen. Als fundamentele onderwerpen worden genoemd: verzamelingen, relaties en functies, algebraïsche structuren, het getalbegrip, beginselen van de lineaire algebra, een axiomatisch opgezette meetkunde, analyse. Maar ook onderwerpen als topologie, statistiek en waarschijnlijkheidsrekening, numerieke analyse en grondslagenonderzoek worden als thema's voor cursussen genoemd.
In het derde hoofdstuk komt de organisatie van de cursussen ter sprake, in het vierde het fundamenteel onderzoek. Een lange lijst van onderwerpen die voor zo'n onderzoek in aanmerking komen wordt opgesomd, waarvan we hier de invoering van materiële didactische hulpmiddelen willen noemen naast dat van de evaluatieproblematiek. De 'pédagogie de la mathématique' wordt een nieuwe wetenschap.
Wetenschappelijk onderzoek, modernisering van het wiskunde-onderwijs en continue scholing van de docenten zullen in de toekomst hand in hand dienen te gaan.
In de tweede helft van het boek komt de leraarsopleiding in diverse landen ter sprake en vindt men over het onderwijs en de nascholing vele interessante gegevens. Deze laatste zijn soms wat chaotisch bijeengebracht waardoor een onevenredigheid is ontstaan tussen de omvang van de mededelingen en hun wezenlijke betekenis. Onder de titel 'Ouvrages' vindt men bij

België en bij Ierland meer dan een dozijn titels, voor Nederland slechts het ene zinnetje *Cours polycopies (gratuits)*. Bij het tijdschriftenoverzicht voor de diverse landen ontbreekt voor Nederland de naam *Euclides* terwijl Freudenthals tijdschrift *Educational studies in mathematics* met een verminkte titel wordt aangegeven. Maar toch zijn dat allemaal maar kleine tekortkomingen bij een overigens zo instructief overzicht.
In de rij der landen die zich voor de continue scholing van de leraren interesseren blijkt Nederland een eervolle plaats in te nemen. Kennismaking met dit rapport bevelen we de Nederlandse leraar die de desbetreffende problematiek graag vanuit internationaal gezichtspunt belicht wil zien, van harte aan.
Een prijs kan ik niet opgeven. Het recensieexemplaar bevat een kaartje met de zin 'avec les compliments de l'Institute de l'Unesco pour l'éducation' met het adres: Hamburg 13, Feldbrunnenstrasse 70.

Joh. H. Wansink

K. de Bruin e.a. *Wiskunde voor de derde klas V.W.O.*, deel 1, Noorduijn, Culemborg, 1970, 135 blz., *f* 7,90.

Na dit eerste deel verschijnt nog een tweede deel voor de derde klas. Deel 1 behandelt in hoofdstuk I functies, in hoofdstuk II en IV de rekenliniaal, in hoofdstuk III de vermenigvuldigingstransformatie en in hoofdstuk V de lineaire relatie en functie, waarbij in § 6 nog eens aandacht besteed wordt aan lineair programmeren. Na een 90-tal herhalingsopgaven volgen, zoals gebruikelijk in deze serie, korte samenvattingen.
Enkele opmerkingen.
$f(12) =$ zondag, 'de functiewaarde van 12 is zondag' is een uitspraak die ik niet kan waarderen. Het lijkt me een nuttige afspraak alleen dan van functies te spreken als domein en bereik getallenverzamelingen zijn. Waarom de auteurs, na de behandeling van vectoren, geen afscheid hebben willen nemen van de zo onhandige richtingscoëfficiënt, terwijl de richtingsvector (en t.z.t. de normaalvector) zich zo vanzelfsprekend aanbieden, is me niet duidelijk.
Wat er op blz. 46, § 3 aan de hand is, met het punt O, dat het beginpunt is van de vectoren en niet altijd O behoeft te heten, wil ik t.z.t. wel eens weten. De uitvoering is voortreffelijk. De ouders van onze leerlingen zullen nog wel eens angstig op de boekenrekeningen wachten van hun kinderen.

Burgers

Dr. Hermann Athen; *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*; Ergänzungshefte, Heft 2, 2e druk (omgewerkt); 148 blz., D.M. 9,60, Schroedel, Schöningh, Paderborn.

De steeds grotere betekenis van het begrip 'stochastiek' en het toenemend gebruik ervan in diverse takken van wetenschap heeft in Duitsland geleid tot de opneming van het vak kansrekening en statistiek in de schoolwiskunde. Deze eigentijdse ontwikkeling heeft H. Athen ertoe gebracht zijn oorspronkelijke boek '*Einführung in die Statistik*' om te werken en als Ergänzungsheft onder de bovengenoemde titel te laten verschijnen.
Via uitkomstenverzamelingen en frequentiefuncties komt hij na een vluchtig oponthoud bij de wet van de grote aantallen (experimenteel) tot een axiomasysteem, waaruit hij dan door toevoeging van het begrip 'even waarschijnlijk' tot de definitie van Laplace geraakt.

Deze kansdefinitie is dan de basis van het mathematisch model dat verder gebruikt wordt. De binomiale verdeling wordt uitvoerig behandeld nadat een kort hoofdstuk over stochastische variabelen, kansverdelingen in het algemeen en de verwachting van een stochastische variabele verwerkt is. De schrijver getroost zich dan veel moeite om met limietprocessen tot de normale verdeling en de Poissonverdeling te komen.
Het boek besluit met een hoofdstuk: *Praktische Statistik*, waarin o.a. het gemiddelde en de standaardafwijking van een steekproef worden bestudeerd, verder het testen van hypothesen en het begrip correlatie worden besproken.
Vele grafieken en tabellen, 5 foto's en een schat van vraagstukken maken het boek zeer aantrekkelijk. Allerlei onderwerpen worden in het voorbijgaan even aangestipt zoals b.v. markoffketens en -processen. Bij het rekenen met kansen blijven de verzamelingen centraal staan. Dat een aantal, gemakkelijk te corrigeren, drukfouten de tekst hier en daar ontsieren, doet weinig af aan dit interessante boek.
De opzet van het boek lijkt sterk op de tot nu toe gevolgde weg bij het experiment 'statistiek en kansrekening' dat momenteel in ons land aan een achttal scholen wordt uitgevoerd. Helaas zullen we de leerstofomvang van dit boek niet kunnen evenaren. De behandeling van het gehele boek vergt beslist veel meer tijd dan bij ons kan worden verstrekt.
Hebben onze buren een grotere voorraad tijd beschikbaar voor het wiskundeonderwijs?

J. J. Wouters

W. C. Boyce, R. C. Diprima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, John Wiley, Inc., London, 584 blz. 97/–

Voor degenen die hun kennis en technische vaardigheid voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen nog eens willen testen is dit een aanbevelenswaardig boek.
Een groot aantal vraagstukken, ook toepassingen op het gebied van de fysica, is volledig uitgewerkt. Bovendien vindt men na elk hoofdstuk een rijk gevarieerde serie opgaven, waarvan de resultaten verzameld zijn in een index van liefst 45 bladzijden.
Behalve de vergelijkingen van eerste orde, vindt men de lineaire van tweede en hogere orden, de laplacetransformaties, systemen van vergelijkingen van de eerste orde met een overzicht van de matrix algebra, partiële differentiaalvergelijkingen, fourierreeksen, numerieke methoden en het theorema van Sturm-Liouville. De uitvoering is, zoals gewoonlijk, uitstekend verzorgd.

Burgers

Benson Mates, *Elementare Logik, Prädikatenlogik der ersten Stufe*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1969, 296 blz., DM 28.—.

Het boek is een vertaling van Elementary Logic, waarvan de eerste editie verschenen is in 1965. Zoals de titel aangeeft, wordt in het boek de predikatenlogica van de eerste orde behandeld, dat is de predikatenlogica, waarin de predikatenvariabelen uitsluitend vrij voorkomen. Primair is gesteld een semantische behandelingswijze, d.w.z. een behandelingswijze, waarbij de voorwaarden opgespoord worden waaronder een uitdrukking bij elke interpretatie overgaat in een ware uitspraak. Daarna worden afleidingsregels (deductieregels) opgesteld. Vervolgens wordt bewezen, dat afleidbaarheid ekwivalent is met waar zijn bij elke interpretatie. Daarbij wordt tevens de stelling van Löwenheim-Skolem afgeleid. De onvolledigheid van de predikatenlogica wordt vermeld, maar niet bewezen.
De behandeling van de uitsprakenlogica (Aussagenkalkül), die gewoonlijk als apart hoofdstuk aan de predikatenlogica vorafgaat, is in dit boek opgenomen in die van de predikatenlogica. Het boek is niet moeilijk te lezen, maar is wel nogal zwaarwichtig.

P. G. J. Vredenduin

Prof. dr. Bernhard Hornfeck, *Algebra*, Walter de Gruyter & Co, Berlin 1969, 271 blz., DM 28.—.

Een boek over de klassieke algebra, d.w.z. commutatieve en homologische algebra worden zorgvuldig vermeden.
Het bevat de hoofdstukken: 1. Grundlagen, 2. Gruppen (met de stellingen van Sylow), 3. Ringe, 4. Ideale, 5. Vectorräume, 6. Körpertheorie, 7. Galoistheorie en een Anhang over het rekenen met complexe getallen. Hoewel het voorwoord vermeldt, dat het boek uit colleges is ontstaan, is de opbouw streng formeel: van het algemene naar het bijzondere. Toch een geschikt leerboek gezien de goede kwaliteit van de voorbeelden en de opgaven, waarvan de oplossingen achterin gedrukt staan.

J. Simonis

Didactische literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, XXI[7]–XXII[8], augustus 1968–oktober 1969.

Fr. Mutscheller, 59. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des math. und naturwiss. Unterrichts;
J. Timm, Strukturerhaltende Abbildungen in der Algebra.

E. Merkel, Boolesche Maschinen; Aufbau der Syllogistik;
O. Botsch, Und nochmals: Potenzsummen.

I. Bartsch, Programmierter Unterricht im Gymnasium;
W. Tietze, Die Geburtsstunde des Integralkalküls (Cavalieri, 1635);
R. Müller, Der metrische Vektorraum als abstrakte Struktur im Oberstufenunterricht;
U. Uffrecht, Rechenstäbe für die Schule;
E. Hunger, Uber den altertümlichen Idealismus Martin Wagenscheins.

U. Löttgen, Das axiomatische Denken in der Mathematik;
G. Pickert, Aufbau der Analysis vom Stetigkeitsbegriff her;
R. Bose, Einfache Aufgaben über Bogenlänge.

G. Schaefer, Logisches Verhalten von Gehirn und Elektronengehirn;
R. Nockemann, Zur Quantenmechanik des Reflexionsoszillators;
F. Raith, Lineare Algebra und Elementargeometrie.

E. Lamla, Die Zeitmessung mit Lichtuhren und die sogenannten Paradoxien der Relativitätstheorie;
B. Döring, Uber die näherungsweise Lösung von Gleichungen.

H. Elsässer und H. Scheffler, Extragalaktische Radioquelle;
B. Reimers, Boolescher Verband und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

L. Sauermann, Die Zahl ein Bild der Schöpfung, die Dyadik von Leibniz;
H. Zeitler, Abbildung analytischer hyperbolischen Geometrien;
M. Leppig, Uber die Zulässigkeit und Zuverlässigkeit zweier Methoden zur Flächeninhaltsbestimmung des Kreises.

H. König, Wissenschaft und Unterricht, und die reelle Welt;
E. Merkel, Spielende und lernende Automaten im Unterricht;
E. Tyart, Zur Einführung des Körpers als algebraische Struktur.

H.-G. Bigalke, Fachdidaktik in Forschung und Lehre;
H. J. Pohley und G. Schaeffer, Das Kascha-Spiel;
K. Seebach, Eine Kennzeichnung der orthogonalen Gruppe im zweidimensionalen Vektorraum.

A. Rohé, Die Bahngestalt von Bewegungen in einem radialsymmetrischen Feld;
Leskie und Vogel, Zur Termbildung bei Gleichungen.

H. Freund, Gröszenbereiche;
R. Lincke, Nichtlineare Optik;
G. Steinberg, Der Mathematikunterricht in der sprachlichen Oberstufe;
H. Settler, Zur Wagenschein-Erörterung.

Boeken-aanwinsten

In deze rubriek zullen wij – min of meer regelmatig – de titels publiceren van boeken, voornamelijk van didactisch belang, welke zijn opgenomen in bibliotheken, waar ze toegankelijk zijn voor ieder. We beperken ons tot de nieuwe aanwinsten. Van voor de school bestemde leerboeken nemen we alleen buitenlandse op.
Wij menen onze lezers hiermee van dienst te zijn: niet alleen omdat men ze ter plaatse kan inzien of ter lezing kan aanvragen, sommigen zijn gebaat te weten dat bepaalde boeken verschenen zijn.
Daar het wel ondoenlijk is om hier in Euclides een systematische catalogus te gaan plaatsen, nemen we telkens een lijst op van een bibliotheek, al zullen we zo mogelijk verwijzen naar andere bibliotheken, waar het boek aanwezig is.
Voor medewerking van instituten e.d. houden we ons gaarne aanbevolen.

Pedagogisch-Didaktisch Instituut voor de Leraarsopleiding, Universiteitscentrum De Uithof, Budapestlaan 6 – Utrecht.

Periode mei 1968 t/m nov. 1969

Budden, F. J.: An introduction to number scales and computors. Londen, 1965.

Cadwell, J. H.: Topics in recreational mathematics. Cambridge, 1966.

Calculus, A. Beck, A. A. Blank, F. L. Elder e.a.: III. Students text; rev. ed. New Haven enz., 1965–1966. Ook aanwezig dl. I en II.

Very short course in mathematics for parents; ed. by E. Begle. Stanford, 1963.

* Handbuch der Schulmathematik; hrsg. von G. Wolff. Hannover enz., 1960–1968; dl. 6 en 7. Reeds aanwezig waren ook dl. 1 t/m 5.

Martin, J.: Notions de base en mathématiques et statistiques à l'usage des biologistes, médicins et pharmaciens; programme des études de médicine, de pharmacie et compléments; 2me éd. réfondue et complétée. Parijs, 1967.

* Popp, W.: Geschichte der Mathematik im Unterricht; I. Unter- und Mittelstufe. München, 1968.

* Schupp, H.: Mathematik. Lehrplan, Vorbereitung, Unterricht. Weinheim enz., 1967.

* Strunz, K.: Der neue Mathematikunterricht in pädagogisch-psychologischer Sicht; 5e völl. umgearb. und stark erw. Aufl. der 'Pädagogischen Psychologie des mathematisches Denkens'. Heidelberg, 1968.

* Unterrichtsbeispiele für Mathematik in Gymnasium; hrsg. von W. Beil. Geleitw. von E. Essen.

Dörrie, H.: 100 great problems of elementary mathematics; their history and solution from the German by D. Antin. New York, 1965. Dover books on elementary and intermediate mathematics.

* Wiegersma, S., en M. Groen: Resultaten van wiskundeonderwijs; een verslag van een onderzoek door het Nederlands Instituut voor praeventieve Geneeskunde TNO uitgevoerd in het kader van het International Educational Achievement Project. Groningen, 1968. Empirische studies over onderwijs, no. 8.

* Lietzmann, W.: Methodik des mathematischen Unterrichts; 4e dr., naar de bew. van R. Stender; erg. und überarb. von H. Jahner. Heidelberg, 1968.

Andelfinger, B., und F. Nestle: Wege zu einer neuen Schulmathematik; Lernen für Morgen mit einem Geleitw. von G. Pickert. Freiburg enz., 1967.

* Bewegingsmeetkunde; verslag van een gecontroleerd innovatieexperiment door A. D. de Groot e.a. Groningen, 1968.

Buffie, E. G., R. C. Welch and D. D. Paige: Mathematics: strategies of teaching. Englewood Cliffs (N.J.), 1968.

* Castelnuovo, E.: Didaktik der Mathematik aus dem Italienischen übers. von M. A. Bossi. Frankfurt a.M., 1968.

Fine, N. J.: An introduction to modern mathematics. Londen, 1967.

Schupp, H.: Abbildungsgeometrie; eine elementare Einführung. Weinheim enz., 1968.

* Brandenburg, W. J. (Diss.): Modernisering van het wiskundeonderwijs; een studie ter beschrijving van de problematiek, ontstaan door de modernisering van de schoolwiskunde, vernieuwing van onderwijsmethoden en wijzigingen in het onderwijsstelsel door de Wet op het voortgezet onderwijs.

Dictionary of symbols of mathematical logic; ed. by R. Feys and F. B. Fitch. Amsterdam, 1969.

Mathematics in the modern world; readings from Scientific American with introductions by M. Kline. San Francisco enz., 1968.

* Johnson, D. A., and G. R. Rising. Guidelines for teaching mathematics; 2e dr. Belmont (Cal.), 1969.

---

* Dit boek is ook aanwezig in de bibliotheek van het Mathematisch Instituut, Hoogbouw WSN, Universiteitscentrum Paddepoel, Groningen.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek

239 Is 13 (zie de oplossing van opgave 238) een record of is het mogelijk 8 bomen zo te plaatsen, dat meer dan 13 afstanden aan elkaar gelijk worden?

240

$$\frac{2}{5} = \frac{26}{65} = \frac{266}{665} = \frac{2666}{6665} = \ldots$$

Zijn er nog meer dergelijke breuken? Zo ja, welke? De triviale, waarbij alle cijfers van de teller en dus ook alle cijfers van de noemer gelijk zijn, blijven buiten beschouwing. (B. Kootstra)

Oplossingen

237 Te bewijzen is, dat elke rij van n getallen een deelrij bevat, waarvan de som door n deelbaar is.

1 Gegeven is de rij $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Leid hieruit af de rij

$$0, a_1, a_1+a_2, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Van elke $n+1$ getallen (en dus ook van deze $n+1$ getallen) zijn er minstens twee aan elkaar gelijk mod n. Het verschil van deze twee getallen is de som van een deelrij van $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die deelbaar is door n.

2 Met volledige inductie. De stelling is juist voor $n = 1$. Onderstel, dat de stelling juist is voor alle getallen kleiner dan n. Onderstel, dat $a_n = p \pmod n$. Als $p = 0$, dan voldoet de deelrij, die a_n als enige term bevat. Is b.v. $p = 7$, dan beschouwen we de rij

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-7}.$$

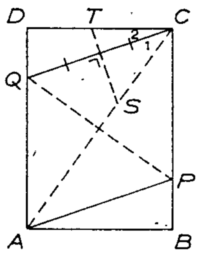
Deze bevat een deelrij, waarvan de som gelijk is aan n—7 (mod n). Voeg aan deze deelrij de term a_n toe en er ontstaat een deelrij, waarvan de som gelijk is aan 0 (mod n).

238 Nadat een boer vier bomen op een rechthoekig stuk land geplant heeft zo, dat de kortste afstand van twee bomen maximaal is, krijgt hij er een vijfde boom bij. Deze wil hij erbij planten zo, dat weer de kortste afstand van twee bomen maximaal is. Als het land vierkant is, plant hij de vijfde boom in het midden.

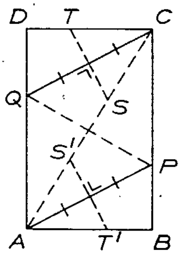
Onderstel nu, dat voor het land $ABCD$ geldt $AB < CD$. De vier reeds geplante bomen zijn A, C, P en Q (figuur 1). Als men denkt aan het principe van de virtuele verplaatsingen, zal de vijfde boom geplant moeten worden

a binnen $ABCD$ en dan zo, dat hij even ver van drie van de bomen komt te staan en verder van de vierde, of

b op de rand van $ABCD$ en dan zo, dat hij even ver van twee van de bomen komt en verder van de andere twee.
Het geval *a* kunnen we verwerkelijken door de boom te planten in het middelpunt S van de omgeschreven cirkel van de scherphoekige driehoek CPQ. Het geval *b* door de boom te planten in het snijpunt T van de middelloodlijn van CQ met CD of DA. Welk van deze twee gevallen het beste is, hangt ervan af, welke afstand het grootste is: SC of TC. Beschouw eerst het overgangsgeval, waarin $AB = \frac{1}{3}BC\sqrt{3}$. Dan is $SC = TC$ en doet het er dus niet toe, of we de boom in S of in T planten. Dit geval is getekend in figuur 2.
In figuur 1 is $AB > \frac{1}{3}BC\sqrt{3}$. Nu is $\angle C_1 > \angle C_2$ en dus $CS > CT$. De boom wordt dus in S geplant.
Op dezelfde manier zien we, dat in het geval $AB < \frac{1}{3}CD\sqrt{3}$ de boom in T geplant dient te worden.



FIGUUR 1



FIGUUR 2

Bezien we figuur 2, dan zien we, dat de vijfde boom naar believen geplant kan worden in S, T, S' en T'. Plant nu eens zowel in S, in T, in S' en in T' een nieuwe boom. Er staan dan 8 bomen, waarvan 13 afstanden onderling gelijk blijken te zijn. Dit brengt ons tot opgave 239.

Inhoud